

CHƯƠNG 3

GIẢI PHƯƠNG TRÌNH $Ax = b$

Nhóm phương pháp tính ⁽¹⁾

KHOA TOÁN - TIN
ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI

01/2024

⁽¹⁾Email: yen.hathingoc@hust.edu.vn

- 1 Nội dung, mục tiêu
- 2 Bài toán
- 3 Phương pháp Gauss
- 4 Phương pháp Gauss-Jordan
- 5 Phương pháp lặp đơn
- 6 Phương pháp lặp Jacobi

Nội dung Chương 3

3.1 Bài toán

3.2 Phương pháp Gauss

3.3 Phương pháp Gauss-Jordan

3.4 Phương pháp lặp đơn, Phương pháp lặp Jacobi

3.5 Phương pháp lặp Gauss-Seidel

Mục tiêu

- ❶ Xác định và thiết lập được bài toán
- ❷ Sử dụng được các phương pháp được học để tìm nghiệm gần đúng theo yêu cầu về sai số
- ❸ Viết được thuật toán và sơ đồ khối cho các phương pháp

- 1 Nội dung, mục tiêu
- 2 Bài toán**
- 3 Phương pháp Gauss
- 4 Phương pháp Gauss-Jordan
- 5 Phương pháp lặp đơn
- 6 Phương pháp lặp Jacobi

Phát biểu bài toán

B1. Giải phương trình $Ax = b$ với $A \in M(m \times n, \mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^m$.

B2. Tìm nghiệm gần đúng của phương trình $Ax = b$ với $A \in M(n, \mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^m$ với sai số không vượt quá ε .

Ví dụ 1.

- Bài toán định giá sản phẩm, bài toán định lượng sản phẩm theo mô hình Leontief
- Bài toán về mạng lưới giao thông.
- Bài toán về mạng điện.

- 1 Nội dung, mục tiêu
- 2 Bài toán
- 3 Phương pháp Gauss**
- 4 Phương pháp Gauss-Jordan
- 5 Phương pháp lặp đơn
- 6 Phương pháp lặp Jacobi

Quy trình thuận - Khử

Sử dụng các phép biến đổi hàng tương đương đưa ma trận bổ sung về dạng bậc thang:

- Chọn phần tử khử khác 0 theo ưu tiên vị trí từ trên xuống dưới, từ trái sang phải.
- Thực hiện khử phía dưới phần tử khử.

Ví dụ 1.

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \end{array} \right] \xleftrightarrow{h_2 \leftrightarrow h_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & -1 & 5 \end{array} \right] \xleftrightarrow{h_3 - 2h_1 \rightarrow h_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -7 & -7 \end{array} \right]$$

Quy trình ngược - Thế

Quy trình ngược tìm các tọa độ của nghiệm bằng cách giải ngược và thế dần từ dưới lên

Ví dụ 2.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -7 & -7 \end{array} \right] \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 6 \\ 2x_2 + x_3 = 3 \\ -7x_3 = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = 1 \\ x_2 = 1 \\ x_1 = 1 \end{cases}$$

- 1 Nội dung, mục tiêu
- 2 Bài toán
- 3 Phương pháp Gauss
- 4 Phương pháp Gauss-Jordan**
- 5 Phương pháp lặp đơn
- 6 Phương pháp lặp Jacobi

Quá trình khử

- Chọn phần tử theo ưu tiên giá trị
 - Ưu tiên 1: chọn phần tử có $|a_{ij}| = 1$
 - Ưu tiên 2: chọn phần tử có $|a_{ij}|$ lớn nhất
- Chỉ chọn trong số các hàng, cột chưa có phần tử khử

3.3 Phương pháp Gauss-Jordan



Ví dụ 3.

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 5 & -2 & 4 & 8 \\ 1 & 7 & -4 & 5 \\ 3 & -5 & 7 & 12 \end{array} \right] \begin{array}{l} h_1 - 5h_2 \rightarrow h_1 \\ h_3 - 3h_2 \rightarrow h_3 \\ \hline \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -37 & 24 & -17 \\ 1 & 7 & -4 & 5 \\ 0 & -26 & 19 & -3 \end{array} \right]$$
$$\begin{array}{l} h_2 + \frac{7}{37}h_1 \rightarrow h_2 \\ h_3 - \frac{26}{37}h_1 \rightarrow h_3 \\ \hline \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -37 & 24 & -17 \\ 1 & 0 & \frac{20}{37} & \frac{66}{37} \\ 0 & 0 & \frac{79}{37} & \frac{331}{37} \end{array} \right] \begin{array}{l} h_2 + \frac{7}{37}h_1 \rightarrow h_2 \\ h_3 - \frac{26}{37}h_1 \rightarrow h_3 \\ \hline \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -37 & 0 & \frac{-9287}{79} \\ 1 & 0 & 0 & \frac{-38}{79} \\ 0 & 0 & \frac{79}{37} & \frac{331}{37} \end{array} \right]$$

Xác định nghiệm

- Chuẩn hóa các phần tử khử
- Xác định nghiệm

Ví dụ 3.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -37 & 0 & \frac{-9287}{79} \\ 1 & 0 & 0 & \frac{-38}{79} \\ 0 & 0 & \frac{79}{37} & \frac{331}{37} \end{array} \right] \xrightarrow{\text{Chuẩn hóa}} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & \frac{9287}{2923} \\ 1 & 0 & 0 & \frac{-38}{79} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{331}{79} \end{array} \right] \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-38}{79} \\ \frac{9287}{2923} \\ \frac{331}{79} \end{bmatrix}$$

- 1 Nội dung, mục tiêu
- 2 Bài toán
- 3 Phương pháp Gauss
- 4 Phương pháp Gauss-Jordan
- 5 Phương pháp lặp đơn**
- 6 Phương pháp lặp Jacobi

Chuẩn của vector $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)^T \in \mathbb{R}^N$

- Chuẩn p của vector:

$$\|x\|_p = \left[\sum_{k=1}^N |x_i|^p \right]^{\frac{1}{p}} \quad (1)$$

- Chuẩn hàng $p = \infty$:

$$\|x\|_\infty = \max_{i=1, N} \{|x_i|\} \quad (2)$$

- Chuẩn cột $p = 1$:

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^N |x_i| \quad (3)$$

Chuẩn của ma trận $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{N \times N}$

- Chuẩn p của ma trận:

$$\|A\|_p = \sup_{x \neq 0} \left\{ \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p} \right\} \quad (4)$$

Chuẩn của ma trận $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{N \times N}$

- Chuẩn hàng $p = \infty$:

$$\|A\|_{\infty} = \max_{i=1, N} \left\{ \sum_{j=1}^N |a_{ij}| \right\} \quad (5)$$

- Chuẩn cột $p = 1$:

$$\|A\|_1 = \max_{j=1, N} \left\{ \sum_{i=1}^N |a_{ij}| \right\} \quad (6)$$

Điều kiện hội tụ

- Phương trình lặp $x = Bx + d, B \in \mathbb{R}^{N \times N}, d \in \mathbb{R}^N$
- $\exists p, \|B\|_p \leq q < 1$
- Xấp xỉ ban đầu bất kỳ $x_0 \in \mathbb{R}^N$

Ví dụ 4. Cho phương trình $x = Bx + d$ với

$$B = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.1 & -0.15 \\ 0.12 & 0.24 & 0.1 \\ -0.25 & 0.17 & -0.23 \end{bmatrix} \quad \text{và} \quad d = \begin{bmatrix} 15.23 \\ 5.82 \\ 9.61 \end{bmatrix}$$

Ta có $\|B\|_{\infty} = \max \{0.45, 0.46, 0.65\} = 0.65 < 1$ thỏa mãn điều kiện hội tụ của phương pháp lặp đơn.

Công thức sai số

- Công thức tiên nghiệm:

$$\|x_n - x^*\|_p \leq \frac{q^n}{1 - q} \|x_1 - x_0\|_p \quad (7)$$

- Công thức hậu nghiệm:

$$\|x_n - x^*\|_p \leq \frac{q}{1 - q} \|x_n - x_{n-1}\|_p \quad (8)$$

Ví dụ 5. Tính đến xấp xỉ x_5 và đánh giá sai số cho x_5 biết $x_0 = \begin{bmatrix} 20 & 11 & 5 \end{bmatrix}^T$.

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
20	19.58	19.4825	19.456355	19.4502146	19.44835396
11	11.36	11.429	11.44289	11.4446198	11.44483513
5	5.33	5.4203	5.435636	5.44100627	5.441600274

Áp dụng công thức sai số hậu nghiệm (8), ta có đánh giá:

$$\|x_n - x^*\|_\infty \leq \frac{q}{1 - q} \|x_n - x_{n-1}\|_\infty = 0.003455475$$

$$\delta x_n = \frac{\Delta x_n}{\|x_n\|_\infty} = 0.0177674\%$$

- 1 Nội dung, mục tiêu
- 2 Bài toán
- 3 Phương pháp Gauss
- 4 Phương pháp Gauss-Jordan
- 5 Phương pháp lặp đơn
- 6 Phương pháp lặp Jacobi**

Định nghĩa 1

Ma trận chéo trội

- *Ma trận chéo trội hàng:*

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i}^N |a_{ij}| \quad (9)$$

- *Ma trận chéo trội cột:*

$$|a_{jj}| > \sum_{i=1, i \neq j}^N |a_{ij}| \quad (10)$$

Phương trình lặp và hệ số co

- Phương trình lặp:

$$x = (I - TA)x + Tb, \quad T = \text{diag} \left(\frac{1}{a_{11}}, \frac{1}{a_{22}}, \dots, \frac{1}{a_{NN}} \right) \quad (11)$$

- Hệ số co:

$$q_{\text{hàng}} = \max_{i=1,N} \frac{1}{|a_{ii}|} \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \quad (12)$$

$$q_{\text{cột}} = \max_{j=1,N} \frac{1}{|a_{jj}|} \sum_{i \neq j} |a_{ij}| \quad (13)$$

Ví dụ 6. Cho phương trình $Ax = b$ với

$$A = \begin{bmatrix} 12.2 & 2.1 & -3.15 \\ 1.12 & 7.24 & 2.1 \\ -3.25 & 1.17 & -9.23 \end{bmatrix} \quad \text{và} \quad b = \begin{bmatrix} 15.23 \\ 5.82 \\ 9.61 \end{bmatrix}$$

3.5 Phương pháp lặp Jacobi



Dễ kiểm tra thấy A là ma trận vừa chéo trội hàng vừa chéo trội cột.

$$T = \text{diag} \left(\frac{1}{12.2}, \frac{1}{7.24}, \frac{-1}{9.23} \right) \text{ và } B = I - TA = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-2.1}{12.2} & \frac{3.15}{12.2} \\ \frac{-1.12}{7.24} & 0 & \frac{-2.1}{7.24} \\ \frac{-3.25}{9.23} & \frac{1.17}{9.23} & 0 \end{bmatrix}$$

và

$$d = Tb = \begin{bmatrix} \frac{15.23}{12.2} & \frac{5.82}{7.24} & \frac{-9.61}{9.23} \end{bmatrix}^T$$

Hệ số co trường hợp xem A là ma trận chéo trội hàng:

$$q = \max \left\{ \frac{5.25}{12.2}, \frac{3.22}{7.24}, \frac{4.42}{9.23} \right\} = 0.478873239.$$

Hệ số co trường hợp xem A là ma trận chéo trội cột:

$$q = \max \left\{ \frac{4.37}{12.2}, \frac{3.27}{7.24}, \frac{5.25}{9.23} \right\} = 0.5687974.$$

Công thức lặp: $x_{n+1} = Bx_n + d$.

Công thức sai số

- Công thức tiên nghiệm:

$$\|x_n - x^*\|_p \leq \frac{\lambda q^n}{1 - q} \|x_1 - x_0\|_p \quad (14)$$

- Công thức hậu nghiệm:

$$\|x_n - x^*\|_p \leq \frac{\lambda q}{1 - q} \|x_n - x_{n-1}\|_p \quad (15)$$

Công thức sai số

- A chéo trội hàng:

$$p = \infty, \quad q = q_{\text{hàng}}, \quad \lambda = 1.$$

- A chéo trội cột:

$$p = 1, \quad q = q_{\text{cột}}, \quad \lambda = \frac{\max \{|a_{ii}|, i = \overline{1, N}\}}{\min \{|a_{ii}|, i = \overline{1, N}\}}.$$

Lặp Gauss-Seidel

- Điều kiện hội tụ: A là ma trận chéo trội.
- Công thức lặp:

$$x_{n+1} = TLx_{n+1} + TUX_n + Tb$$

trong đó

$$T = \text{diag} \left(\frac{1}{a_{11}}, \frac{1}{a_{22}}, \dots, \frac{1}{a_{NN}} \right), \quad A = D - L - U$$

với D , $-L$, $-U$ lần lượt là ma trận đường chéo, ma trận tam giác dưới và ma trận tam giác trên tạo ra từ ma trận A .