

## CHƯƠNG 6

# GIẢI SỐ PHƯƠNG TRÌNH VI PHẦN

Nhóm phương pháp tính <sup>(1)</sup>

KHOA TOÁN - TIN  
ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI

01/2024

---

<sup>(1)</sup>Email: [yen.hathingoc@hust.edu.vn](mailto:yen.hathingoc@hust.edu.vn)

## 1 Nội dung, mục tiêu

## 2 Bài toán Cauchy

## 3 Các công thức Euler

- Công thức Euler hiện
- Công thức Euler ẩn
- Công thức hình thang, công thức Euler cải biên

## 4 6.3 Các công thức Runge-Kutta

- 6.3.1 Công thức RK3
- 6.3.3 Công thức RK4

## Nội dung Chương 6

**6.1** Bài toán Cauchy

**6.2** Các công thức Euler

**6.3** Các công thức Runge-Kutta

## Mục tiêu chương 6

- ➊ Đưa phương trình vi phân, hệ phương trình vi phân các cấp về dạng phương trình tổng quát cấp 1.
- ➋ Áp dụng các công thức tìm nghiệm của phương trình trên một đoạn đóng.
- ➌ Viết được thuật toán và sơ đồ khối cho các phương pháp.

## 1 Nội dung, mục tiêu

## 2 Bài toán Cauchy

## 3 Các công thức Euler

- Công thức Euler hiện
- Công thức Euler ẩn
- Công thức hình thang, công thức Euler cải biên

## 4 6.3 Các công thức Runge-Kutta

- 6.3.1 Công thức RK3
- 6.3.3 Công thức RK4

### Bài toán Cauchy

Cho  $I = [x_0, X]$  là một đoạn con đóng trong  $\mathbb{R}$ . Tìm hàm vector  $y \in C^1[I, \mathbb{R}^k]$  sao cho

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y), & x \in I \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (1)$$

### Ví dụ bài toán 1 chiều cấp 1

Cho  $I = [1, 5] \subset \mathbb{R}$ . Tìm hàm vector  $y \in C^1[I, \mathbb{R}]$  sao cho:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{xy}{x^2 + y^2}, & x \in I, \\ y(1) = 1. \end{cases} \quad (2)$$

### Ví dụ bài toán 2 chiều cấp 1

Cho  $I = [1, 5] \subset \mathbb{R}$ . Tìm hàm vector  $y \in C^1[I, \mathbb{R}^2]$  sao cho

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{xyz}{1 + x^2 + y^2}, & x \in I, \quad y(1) = 1, \\ \frac{dz}{dx} = \frac{x + y + z}{1 + x^2 + y^2}, & x \in I, \quad z(1) = -1. \end{cases} \quad (3)$$

Đưa bài toán về dạng tổng quát cấp 1 trong không gian hai chiều với hàm véc-tơ  $u(x) = (y(x), z(x))^T$ .



### Ví dụ bài toán 1 chiều cấp 2

Cho  $I = [1, 5]$  là một đoạn con đóng trong  $\mathbb{R}$ . Tìm hàm vector  $y \in C^2[I, \mathbb{R}]$  sao cho

$$\begin{cases} \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{xy \sin y'}{1 + x^2 + y^2}, & x \in I, \\ y(1) = 1, \quad y'(1) = -0.5. \end{cases} \quad (4)$$

Đặt  $z = y'$ ,  $u = (y, z)^T$ . Bài toán đưa được về dạng tổng quát với  $k = 2$ .

$$\begin{cases} \frac{du}{dx} = \begin{bmatrix} y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z \\ \frac{xy \sin z}{1 + x^2 + y^2} \end{bmatrix} & x \in I, \\ u(1) = (1, -0.5)^T. \end{cases} \quad (5)$$

### Nghiem số của bài toán

Nghiem số của bài toán là hàm lưới  $y_h(x)$  xác định trên

$$\Omega_h = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = X\} \subset I$$

thỏa mãn giá trị của nghiệm đúng của bài toán:

$$y(x_i) \approx y_h(x_i)$$

Ký hiệu:  $y_i = y_h(x_i)$

## 1 Nội dung, mục tiêu

## 2 Bài toán Cauchy

## 3 Các công thức Euler

- Công thức Euler hiện
- Công thức Euler ẩn
- Công thức hình thang, công thức Euler cải biên

## 4 6.3 Các công thức Runge-Kutta

- 6.3.1 Công thức RK3
- 6.3.3 Công thức RK4

### Ý tưởng

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t, y(t)) dt = y_n + S_n \quad (6)$$

Dùng các công thức tính gần đúng tích phân xác định  $S_n$  xây dựng các công thức giải gần đúng phương trình vi phân.

### Công thức Euler hiện

$$y_{n+1} = y_n + S_n = y_n + hf(x_n, y_n) \quad (7)$$

**Ví dụ 1.** Dùng công thức Euler hiện (7) giải gần đúng bài toán (2) với bước lưới  $h = 0.1$  trên đoạn  $[1, 2]$

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{xy}{x^2 + y^2}, & x \in I, \\ y(1) = 1. \end{cases}$$

**Lời giải.**

**B1.** Xác định các yếu tố đầu vào:

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2},$$
$$x_0 = 1, h = 0.1, x_k = x_0 + kh, y_0 = 1.$$

**B2.** Viết công thức Euler hiện cho bài toán (2):

$$y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k) = y_k + \frac{hx_k y_k}{x_k^2 + y_k^2}$$



### B3. Lập bảng tính toán

$k$	$x_k$	$y_k$	$k$	$x_k$	$y_k$
0	1	1	6	1.6	1.297961916
1	1.1	1.05	7	1.7	1.346887319
2	1.2	1.099945946	8	1.8	1.395562002
3	1.3	1.149757054	9	1.9	1.443985451
4	1.4	1.19938233	10	2	1.492159764
5	1.5	1.248790198			

### Công thức Euler ẩn

$$y_{n+1} = y_n + S_n = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1}) \quad (8)$$

Công thức Euler ẩn (8) là công thức ẩn cần giải phương trình để tìm  $y_{n+1}$

### Công thức Euler ẩn

$$\begin{cases} t_{n,0} = y_n + hf(x_n, y_n) \\ t_{n,k+1} = y_n + hf(x_{n+1}, t_{n,k}) \\ y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, t_{n,k+1}) \end{cases} \quad (9)$$

Quy ước, nếu không nói rõ yêu cầu sai số, khi giải phương trình (8), chỉ cần lặp 1 lần, tức là dùng công thức (9) bỏ qua công thức ở giữa.

**Ví dụ 2.** Sử dụng công thức Euler ẩn tìm nghiệm số của bài toán (3) trên đoạn  $[1, 2]$  với bước lưới  $h = 0.1$ .

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{xyz}{1 + x^2 + y^2}, & x \in I, \\ \frac{dz}{dx} = \frac{x + y + z}{1 + x^2 + y^2}, & x \in I, \\ y(1) = 1, \quad z(1) = -1. \end{cases}$$

**Lời giải.**

**B1.** Xác định các yếu tố đầu vào:

$$f(x, y, z) = \frac{xyz}{1 + x^2 + y^2},$$

$$g(x, y, z) = \frac{x + y + z}{1 + x^2 + y^2},$$

$$x_0 = 1, \quad h = 0.1, \quad x_k = x_0 + kh, \quad y_0 = 1, \quad z_0 = -1.$$

### Lời giải ví dụ 2.

**B2.** Công thức Euler ẩn (9) cho bài toán:

$$u_k = y_k + hf(x_k, y_k, z_k) = y_k + \frac{hx_k y_k z_k}{1 + x_k^2 + y_k^2}$$

$$v_k = z_k + hg(x_k, y_k, z_k) = z_k + \frac{h(x_k + y_k + z_k)}{1 + x_k^2 + y_k^2}$$

$$y_{k+1} = y_k + hf(x_{k+1}, u_k, v_k) = y_k + \frac{hx_{k+1} u_k v_k}{1 + x_{k+1}^2 + u_k^2}$$

$$z_{k+1} = z_k + hg(x_{k+1}, u_k, v_k) = z_k + \frac{h(x_{k+1} + u_k + v_k)}{1 + x_{k+1}^2 + u_k^2}$$

### Lời giải ví dụ 2.

#### B3. Lập bảng tính toán

$k$	$x_k$	$y_k$	$z_k$	$u_k$	$v_k$
0	1	1	-1	0.966666667	-0.966666667
1	1.1	0.967310954	-0.965017668	0.934668856	-0.92997629
2	1.2	0.935832743	-0.928661728	0.904380549	-0.892254911
3	1.3	0.905928295	-0.891256896	0.876030056	-0.853809404
4	1.4	0.877835261	-0.853101353	0.849731554	-0.814910823
5	1.5	0.851685419	-0.814460773	0.825511829	-0.775792036

### Lời giải ví dụ 2.

#### B3. Lập bảng tính toán

$k$	$x_k$	$y_k$	$z_k$	$u_k$	$v_k$
6	1.6	0.827526794	-0.77556577	0.803335261	-0.736648488
7	1.7	0.80534506	-0.736612046	0.783124773	-0.697640986
8	1.8	0.785082249	-0.697762401	0.764778096	-0.658899505
9	1.9	0.766651956	-0.659149835	0.74817969	-0.620527352
10	2	0.749951059	-0.620881143		



### Công thức hình thang

$$y_{n+1} = y_n + S_n = y_n + \frac{h}{2}f(x_n, y_n) + \frac{h}{2}f(x_{n+1}, y_{n+1}) \quad (10)$$

Công thức hình thang (10) là công thức ẩn cần giải phương trình để tìm  $y_{n+1}$

### Công thức hình thang

$$\begin{cases} t_{n,0} = y_n + hf(x_n, y_n) \\ t_{n,k+1} = y_n + \frac{h}{2}f(x_n, y_n) + \frac{h}{2}f(x_{n+1}, t_{n,k}) \\ y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}f(x_n, y_n) + \frac{h}{2}f(x_{n+1}, t_{n,k+1}) \end{cases} \quad (11)$$

Quy ước, nếu không nói rõ yêu cầu sai số, khi giải phương trình (8), chỉ cần lặp 1 lần, tức là dùng công thức (11) bỏ qua công thức giữa.

**Ví dụ 3.** Dùng công thức Euler cải biên (công thức hình thang) tìm nghiệm số của bài toán (4) trên đoạn  $[1, 2]$  với bước lưới  $h = 0.1$ .

$$\begin{cases} \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{xy \sin y'}{1 + x^2 + y^2}, & x \in I, \\ y(1) = 1, & y'(1) = -0.5. \end{cases}$$

**Lời giải.**

Xác định các yếu tố đầu vào:

$$z = y', \quad f(x, y, z) = z, \quad g(x, y, z) = \frac{xy \sin z}{1 + x^2 + y^2}.$$

$$x_0 = 1, \quad h = 0.1, \quad x_k = x_0 + kh = 1 + 0.1k, \quad y_0 = 1, \quad z_0 = -0.5.$$

### Lời giải ví dụ 3.

Công thức Euler cải biên (11) cho bài toán:

$$u_n = y_n + hf(x_n, y_n, z_n) = y_n + 0.1z_n,$$

$$v_n = z_n + hg(x_n, y_n, z_n) = z_n + \frac{0.1x_n y_n \sin z_n}{1 + x_n^2 + y_n^2},$$

### Lời giải ví dụ 3.

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}f(x_n, y_n, z_n) + \frac{h}{2}f(x_{n+1}, u_n, v_n)$$

$$= y_n + \frac{0.1z_n}{2} + \frac{0.1v_n}{2},$$

$$z_{n+1} = z_n + \frac{h}{2}g(x_n, y_n, z_n) + \frac{h}{2}g(x_{n+1}, u_n, v_n)$$

$$= z_n + \frac{0.1x_n y_n \sin z_n}{2(1 + x_n^2 + y_n^2)} + \frac{0.1x_n u_n \sin v_n}{2(1 + x_n^2 + u_n^2)}.$$

### Lời giải ví dụ 3.

Lập bảng tính toán

$k$	$x_k$	$y_k$	$z_k$	$u_k$	$v_k$
0	1	1	-0.5	0.95	-0.515980851
1	1.1	0.949200957	-0.516273007	0.897573657	-0.53284084
2	1.2	0.896745265	-0.532985803	0.843446685	-0.549839863
3	1.3	0.842603982	-0.549835341	0.787620448	-0.566670435
4	1.4	0.786778693	-0.566519423	0.730126751	-0.583037017
5	1.5	0.729300871	-0.582747506	0.67102612	-0.598666134

### Lời giải ví dụ 3.

Lập bảng tính toán

$k$	$x_k$	$y_k$	$z_k$	$u_k$	$v_k$
6	1.6	0.670230189	-0.598250456	0.610405143	-0.613314659
7	1.7	0.609651933	-0.61278855	0.548373078	-0.626775798
8	1.8	0.547673716	-0.626157312	0.485057985	-0.638882597
9	1.9	0.48442172	-0.638190988	0.420602621	-0.649509069
10	2	0.420036717	-0.648763747		

## 1 Nội dung, mục tiêu

## 2 Bài toán Cauchy

## 3 Các công thức Euler

- Công thức Euler hiện
- Công thức Euler ẩn
- Công thức hình thang, công thức Euler cải biên

## 4 6.3 Các công thức Runge-Kutta

- 6.3.1 Công thức RK3
- 6.3.3 Công thức RK4



### Công thức RK3 cho bài toán 1 chiều

$$\left\{ \begin{array}{l} k_{1,n} = hf(x_n, y_n) \\ k_{2,n} = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_{1,n}}{2}\right) \\ k_{3,n} = hf(x_n + h, y_n - k_{1,n} + 2k_{2,n}) \\ y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_{1,n} + 4k_{2,n} + k_{3,n}) \end{array} \right. \quad (12)$$

### Công thức RK3 cho bài toán 2 chiều

$$\left\{ \begin{array}{l} k_{1,n} = hf(x_n, y_n, z_n) \\ l_{1,n} = hg(x_n, y_n, z_n) \\ k_{2,n} = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_{1,n}}{2}, z_n + \frac{l_{1,n}}{2}\right) \\ l_{2,n} = hg\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_{1,n}}{2}, z_n + \frac{l_{1,n}}{2}\right) \end{array} \right. \quad (13)$$

### Công thức RK3 cho bài toán 2 chiều

$$\left\{ \begin{array}{l} k_{3,n} = hf(x_n + h, y_n - k_{1,n} + 2k_{2,n}, z_n - l_{1,n} + 2l_{2,n}) \\ l_{3,n} = hg(x_n + h, y_n - k_{1,n} + 2k_{2,n}, z_n - l_{1,n} + 2l_{2,n}) \\ y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_{1,n} + 4k_{2,n} + k_{3,n}) \\ z_{n+1} = z_n + \frac{1}{6}(l_{1,n} + 4l_{2,n} + l_{3,n}) \end{array} \right. \quad (14)$$

### Công thức RK4

$$\left\{ \begin{array}{l} k_{1,n} = hf(x_n, y_n) \\ k_{2,n} = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_{1,n}}{2}\right) \\ k_{3,n} = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_{2,n}}{2}\right) \\ k_{4,n} = hf(x_n + h, y_n + k_{3,n}) \\ y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_{1,n} + 2k_{2,n} + 2k_{3,n} + k_{4,n}) \end{array} \right. \quad (15)$$

**Bài tập 1.** Viết công thức RK4 cho bài toán 2 chiều.

**Bài tập 2.** Áp dụng công thức RK3, RK4 giải các bài toán (2), (3), (4).