

Chương 1

Sai số

Nhóm Phương pháp tính ⁽¹⁾

KHOA TOÁN - TIN
ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI

01/2024

⁽¹⁾Email: yen.hathingoc@hust.edu.vn

- 1 Nội dung, mục tiêu
- 2 Khái niệm
- 3 Phân loại sai số
- 4 Quy ước viết số gần đúng
- 5 Sai số trong tính toán
- 6 Sai số trong không gian nhiều chiều

Nội dung Chương 1

1.1 Khái niệm

1.2 Các loại sai số

1.3 Quy ước viết số gần đúng

1.4 Sai số trong tính toán

1.5 Sai số trong không gian nhiều chiều

Mục tiêu

- 1 Xác định được ước lượng trên và ước lượng dưới của một số hoặc một đại lượng.
- 2 Đánh giá được sai số cho các xấp xỉ gần đúng.
- 3 Nắm được cách xác định sai số của các xấp xỉ trên không gian \mathbb{R} , \mathbb{R}^n .
- 4 Xác định được các chữ số đáng tin và viết được số gần đúng theo quy ước.

- 1 Nội dung, mục tiêu
- 2 Khái niệm**
- 3 Phân loại sai số
- 4 Quy ước viết số gần đúng
- 5 Sai số trong tính toán
- 6 Sai số trong không gian nhiều chiều

Định nghĩa 1

- Số a được gọi là một số gần đúng hay một xấp xỉ của a^* nếu a đủ gần a^* và được dùng để thay thế cho a^* trong tính toán.
- Nếu $a < a^*$ thì ta nói a là một ước lượng dưới của a^* . Tương ứng, nếu $a > a^*$ thì ta nói a là một ước lượng trên của a^* .

Ví dụ 1.

- 3.14 là một ước lượng dưới của π .
- 3.1416 là một ước lượng trên của π .
- Các số 3.14 và 3.1416 là các số gần đúng của π .

- 1 Nội dung, mục tiêu
- 2 Khái niệm
- 3 Phân loại sai số**
- 4 Quy ước viết số gần đúng
- 5 Sai số trong tính toán
- 6 Sai số trong không gian nhiều chiều

1.2.1. Phân loại sai số theo ý nghĩa

- Sai số giá trị tuyệt đối tới hạn (sai số tuyệt đối):

$$|a - a^*| \leq \Delta a.$$

- Sai số giá trị tương đối tới hạn (sai số tương đối):

$$\delta a = \frac{\Delta a}{|a|}.$$

1.2.2. Phân loại sai số theo nguyên nhân

- Sai số đo đạc: một nửa đơn vị chia nhỏ nhất của công cụ đo.
- Sai số làm tròn: một nửa thứ nguyên của chữ số giữ lại cuối cùng
- Sai số tính toán: Xem mục 1.4
- Sai số phương pháp.
- Sai số mô hình hóa.
- ...

- 1 Nội dung, mục tiêu
- 2 Khái niệm
- 3 Phân loại sai số
- 4 Quy ước viết số gần đúng**
- 5 Sai số trong tính toán
- 6 Sai số trong không gian nhiều chiều

Quy ước 1.

Khi viết số gần đúng, viết kèm theo sai số giá trị tuyệt đối liên kết bởi dấu cộng trừ:

$$a^* = a \pm \Delta a.$$

Ý nghĩa:

$$a^* \in (a - \Delta a, a + \Delta a)$$

Ví dụ 2.

- $e \in (2.718, 2.7183)$
- Chọn $\hat{e} \in (2.718, 2.7183)$ bất kỳ là một xấp xỉ của e với sai số $|e - \hat{e}| \leq 3 \times 10^{-4}$.
- Đặc biệt, nếu chọn $\hat{e} = 2.71815$ thì sai số đạt được là $\Delta e = 1.5 \times 10^{-4}$.

Định nghĩa 2

- Các chữ số có nghĩa của số a là tất cả các chữ số tính từ chữ số khác 0 đầu tiên từ bên trái.
- Cho $a = \alpha_k \times 10^k + \alpha_{k-1} \times 10^{k-1} + \dots + \alpha_{k-s} \times 10^{k-s}$ là biểu diễn trong hệ cơ số thập phân một xấp xỉ của a^* với sai số tuyệt đối Δa . Khi đó, α_i được gọi là chữ số đáng tin của a nếu nó là chữ số có nghĩa thỏa mãn:

$$\Delta a \leq 0.5 \times 10^i$$

nếu bất đẳng thức trái dấu thì ta nói α_i là chữ số đáng ngờ.

Ví dụ 3. Với $a^* = 21.31075490 \pm 0.00043$, ta có:

Các chữ số có nghĩa của a là 2;1;3;1;0;7;5;4;9;0.

$$0.5 \times 10^{-4} \leq \Delta a = 0.43 \times 10^{-3} \leq 0.5 \times 10^{-3}$$

Do đó, các chữ số đáng tin của a là 2;1;3;1;0.

Các chữ số đáng ngờ của a là: 7;5;4;9;0.

Quy ước 2.

Khi viết số gần đúng, chỉ viết các chữ số đáng tin kèm theo thứ nguyên của chúng.

1.3 Quy ước viết số gần đúng



Ví dụ 3. Do các chữ số đáng tin của a là 2;1;3;1;0 và chữ số tiếp theo là 7 nên ta xấp xỉ $a^* \approx 21.311 = a_1$.

Ta có:

$$0.5 \times 10^{-3} \leq \Delta a_1 = \Delta a + 2.4510 \times 10^{-4} = 6.7510 \times 10^{-4} \leq 0.5 \times 10^{-2}$$

Chữ số 1 với thứ nguyên 10^{-3} không còn đáng tin.

Chọn $a^* \approx 21.31 = a_2$. Ta có:

$$0.5 \times 10^{-3} \leq \Delta a_2 = \Delta a + 0.75490 \times 10^{-3} = 1.18490 \times 10^{-3} \leq 0.5 \times 10^{-2}$$

Các chữ số đáng tin của a_2 là 2;1;3;1. Nói cách khác, tất cả các chữ số của a_2 đều đáng tin.

Theo quy ước 2, ta có $a^* = 21.31$

- 1 Nội dung, mục tiêu
- 2 Khái niệm
- 3 Phân loại sai số
- 4 Quy ước viết số gần đúng
- 5 Sai số trong tính toán**
- 6 Sai số trong không gian nhiều chiều

Trường hợp hàm một biến

Giả sử $x^* = x_0 \pm \Delta x_0$, $y^* = f(x^*) = f(x_0) \pm \Delta y$.

Khi đó, ta có đánh giá:

$$|y_0 - y^*| \leq \left| \frac{df(x_0)}{dx} \right| \Delta x_0. \quad (1)$$

Ví dụ 4.

Cho $y = x^2\sqrt{x+2}$, $x^* = 3.15896 \pm 0.342 \times 10^{-3}$. Tính gần đúng y và ước lượng sai số của y .

Lời giải.

- Tính giá trị hàm số: $y = x^2\sqrt{x+2} = 22.66571031$
- Áp dụng công thức sai số trong tính toán (1), ta có:

$$\Delta y = \left| 2x\sqrt{x+2} + \frac{x^2}{2\sqrt{x+2}} \right|_{x=3.15896} \Delta x = 0.00565902.$$

Trường hợp hàm n biến

Giả sử $x_i^* = x_i^0 \pm \Delta x_i^0$, $y^* = f(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) = f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \pm \Delta y$.

Khi đó, ta có đánh giá:

$$|y - y^*| \leq \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)}{\partial x_i} \right| \Delta x_i = \Delta y. \quad (2)$$

Ví dụ 5.

Cho $z = x^2\sqrt{y+2}$, $x^* = 3.15896 \pm 0.342 \times 10^{-3}$, $y^* = 5.17463 \pm 0.275 \times 10^{-2}$.
Tính gần đúng z và ước lượng sai số của z .

Lời giải.

- $z = x^2\sqrt{y+2} = 26.72932601$

- Áp dụng công thức sai số trong tính toán (2), ta có:

$$\begin{aligned}\Delta z &= \Delta x \left| 2x\sqrt{y+2} \right|_{x=3.15896, y=5.17463} + \Delta y \left| \frac{x^2}{2\sqrt{y+2}} \right|_{x=3.15896, y=5.17463} \\ &= 0.010910229.\end{aligned}$$

Nguyên lý ảnh hưởng đều

Các thành phần có ảnh hưởng như nhau đến sai số đầu ra.

$$\left| \frac{\partial f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)}{\partial x_i} \right| \Delta x_i = \left| \frac{\partial f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)}{\partial x_j} \right| \Delta x_j, \quad \forall i \neq j.$$

Bài toán sai số ngược

Xác định sai số cho phép của các giá trị đầu vào Δx_i để giá trị đầu ra $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ có sai lệch không vượt quá ε .

$$\Delta y \leq \varepsilon$$

Lời giải. Áp dụng nguyên lý ảnh hưởng đều, ta cần:

$$\left| \frac{\partial f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)}{\partial x_i} \right| \Delta x_i \leq \frac{\varepsilon}{n}, \quad i = \overline{1, n}$$

hay

$$\Delta x_i \leq \frac{\varepsilon}{n \left| \frac{\partial f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)}{\partial x_i} \right|}, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

- 1 Nội dung, mục tiêu
- 2 Khái niệm
- 3 Phân loại sai số
- 4 Quy ước viết số gần đúng
- 5 Sai số trong tính toán
- 6 Sai số trong không gian nhiều chiều**

Một số loại chuẩn thông dụng

Cho vector $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$.

- Chuẩn hàng:

$$\|X\|_{\infty} = \max \{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\}$$

- Chuẩn cột:

$$\|X\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$$

- Chuẩn Ôclit:

$$\|X\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

Sai số

Với $p = 1; 2; \infty$, ta có:

- Sai số tuyệt đối:

$$\|X - X^*\|_p \leq \Delta X$$

- Sai số tương đối:

$$\delta X = \frac{\Delta X}{\|X\|_p}$$