

## CHƯƠNG 2

# GIẢI PHƯƠNG TRÌNH $f(x) = 0$

Nhóm phương pháp tính <sup>(1)</sup>

KHOA TOÁN - TIN  
ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI

01/2024

---

<sup>(1)</sup>Email: [yen.hathingoc@hust.edu.vn](mailto:yen.hathingoc@hust.edu.vn)

- 1 Nội dung, mục tiêu
- 2 Bài toán
- 3 Khoảng cách ly nghiệm
- 4 Phương pháp chia đôi
- 5 Phương pháp dây cung
- 6 Phương pháp tiếp tuyến (Newton)
- 7 Phương pháp lặp đơn

## Nội dung Chương 2

2.1 Bài toán

2.2 Khoảng cách ly nghiệm

2.3 Phương pháp chia đôi

2.4 Phương pháp dây cung

2.5 Phương pháp tiếp tuyến

2.6 Phương pháp lặp đơn

## Mục tiêu

- ❶ Xác định và thiết lập được bài toán
- ❷ Biết cách xác định khoảng cách ly nghiệm của phương trình
- ❸ Sử dụng được các phương pháp được học để tìm nghiệm gần đúng theo yêu cầu về sai số
- ❹ Viết được thuật toán và sơ đồ khối cho các phương pháp

- 1 Nội dung, mục tiêu
- 2 Bài toán**
- 3 Khoảng cách ly nghiệm
- 4 Phương pháp chia đôi
- 5 Phương pháp dây cung
- 6 Phương pháp tiếp tuyến (Newton)
- 7 Phương pháp lặp đơn

### Phát biểu bài toán

- **Bài toán 1.** Tìm nghiệm gần đúng của phương trình  $f(x) = 0$ ,  $x \in \mathbb{R}$  và đánh giá sai số cho nghiệm đó.
- **Bài toán 2.** Tìm nghiệm gần đúng của phương trình  $f(x) = 0$  với sai số không vượt quá  $\varepsilon$ .

### Ví dụ 1.

- Tìm các hằng số  $e, \pi$  với bảy chữ số đáng tin sau dấu phẩy.
- Tìm nghiệm của phương trình đa thức  $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$ .
- Tìm nghiệm của phương trình  $x^2 \cos x + 5x - 17 = 0$

- 1 Nội dung, mục tiêu
- 2 Bài toán
- 3 Khoảng cách ly nghiệm**
- 4 Phương pháp chia đôi
- 5 Phương pháp dây cung
- 6 Phương pháp tiếp tuyến (Newton)
- 7 Phương pháp lặp đơn

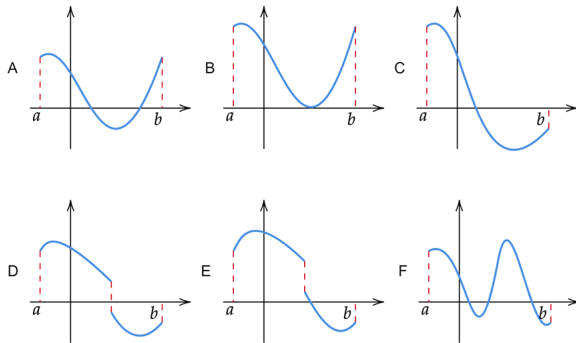


### Định nghĩa

Nếu trong khoảng  $(a, b)$  có đúng một nghiệm của phương trình  $f(x) = 0$  thì  $(a, b)$  được gọi là khoảng cách ly nghiệm của phương trình.

## 2.2 Khoảng cách ly nghiệm

**Ví dụ 2.** Các trường hợp B, C, E trong hình 1 biểu diễn khoảng cách ly nghiệm của phương trình.



**Hình 1:** Khoảng cách ly

### Định lý 1 (Định lý điều kiện đủ)

*Nếu hàm số  $f(x)$  liên tục và đơn điệu trên  $(a,b)$  thỏa mãn  $f(a)f(b) < 0$  thì  $(a,b)$  là khoảng cách ly nghiệm của phương trình  $f(x) = 0$ .*

**Ví dụ 3.** Chứng minh rằng  $(2, 3)$  là khoảng cách ly nghiệm của phương trình  $x^3 - 15 = 0$ .

*Giải.* Xét hàm số  $f(x) = x^3 - 15$ .

Ta có  $f'(x) = 3x^2 > 0 \forall x \in (2, 3)$ .

Do đó,  $f(x)$  là hàm liên tục, đơn điệu trên  $(a, b)$ .

Hơn nữa,  $f(2) = -7 < 0$ ,  $f(3) = 12 > 0 \implies f(2)f(3) < 0$ .

Do đó, theo định lý điều kiện đủ 1, ta có  $(2, 3)$  là khoảng cách ly nghiệm của phương trình  $x^3 - 15 = 0$ .

### Phương pháp khảo sát

- Tìm các điểm dừng của  $f(x)$ .
- Vẽ bảng biến thiên của hàm số.
- Xác định các khoảng đơn điệu và số nghiệm của phương trình.
- Chọn khoảng cách ly nghiệm trên mỗi khoảng đơn điệu theo điều kiện  $f(a)f(b) < 0$ .

### Phương pháp vẽ đồ thị

- Vẽ đồ thị của hàm số  $y = f(x)$ .  
Khoanh vùng giao điểm của đồ thị với trục hoành.
- Viết phương trình  $f(x) = 0$  thành phương trình tương đương  $g(x) = h(x)$ .  
Vẽ đồ thị hai hàm số  $y = g(x)$ ,  $y = h(x)$  và khoanh vùng giao điểm hai đồ thị.

- 1 Nội dung, mục tiêu
- 2 Bài toán
- 3 Khoảng cách ly nghiệm
- 4 Phương pháp chia đôi**
- 5 Phương pháp dây cung
- 6 Phương pháp tiếp tuyến (Newton)
- 7 Phương pháp lặp đơn

### Ý tưởng

- Thu hẹp khoảng cách ly nghiệm bằng cách chia đôi.
- Nguyên lý Dirichlet đảm bảo nghiệm chỉ thuộc một trong hai khoảng chia.



### Điều kiện thực hiện

- $(a, b)$  là khoảng cách ly nghiệm của phương trình.
- $f(x)$  liên tục trên  $(a, b)$ .
- $f(a)f(b) < 0$ .

**Ví dụ 4.** Phương trình  $x^3 - 15 = 0$  và khoảng cách ly nghiệm  $(2, 3)$  thỏa mãn các điều kiện thực hiện của phương pháp chia đôi. (Xem ví dụ 3).

### Thực hiện chia đôi

- Chia lần thứ 1:  $x_1 = \frac{a+b}{2}$
- Kiểm tra nếu  $f(x_1) = 0$  thì kết luận  $x_1$  là nghiệm của phương trình.
- Kiểm tra nếu  $f(x_1)f(a) < 0$  thì kcl mới là  $(a_1, b_1) := (a, x_1)$ .  
Nếu trái lại thì  $(a_1, b_1) := (x_1, b)$
- Thực hiện chia lần 2 tương tự lần 1 với  $x_2 = \frac{a_1+b_1}{2}$  cho khoảng  $(a_1, b_1)$
- Tiếp tục thực hiện chia cho đến khi thu được kết quả như mong muốn.

### Ví dụ 5.

Thực hiện 3 lần chia đôi khoảng cách ly  $(2, 3)$  của phương trình  $x^3 - 15 = 0$ .

### Lời giải.

- Lần 1:  $x_1 = 2.5$ ,  $f(x_1) = 0.625 > 0$ , khoảng cách ly nghiệm mới là  $(2, 2.5)$ .
- Lần 2:  $x_2 = 2.25$ ,  $f(x_2) = -3.609375 < 0$ , khoảng cách ly nghiệm mới là  $(2.25, 2.5)$ .
- Lần 3:  $x_3 = 2.375$ ,  $f(x_3) = -1.603515625 < 0$ , khoảng cách ly nghiệm mới là  $(2.375, 2.5)$ .

### Định lý 2

Cho  $f(x)$  là hàm số liên tục trên  $(a, b)$  thỏa mãn  $f(a)f(b) < 0$ . Giả sử  $(a, b)$  là khoảng cách ly nghiệm của phương trình  $f(x) = 0$ . Khi đó, dãy  $\{x_n\}$ , xác định bằng cách thực hiện phương pháp chia đôi (slide 18), hội tụ tới nghiệm của phương trình theo hai công thức đánh giá sai số:

- Công thức tiên nghiệm:

$$|x_n - \alpha| \leq \frac{|b - a|}{2^n} \quad (1)$$

- Công thức hậu nghiệm:

$$|x_n - \alpha| \leq |x_n - x_{n-1}| \quad (2)$$

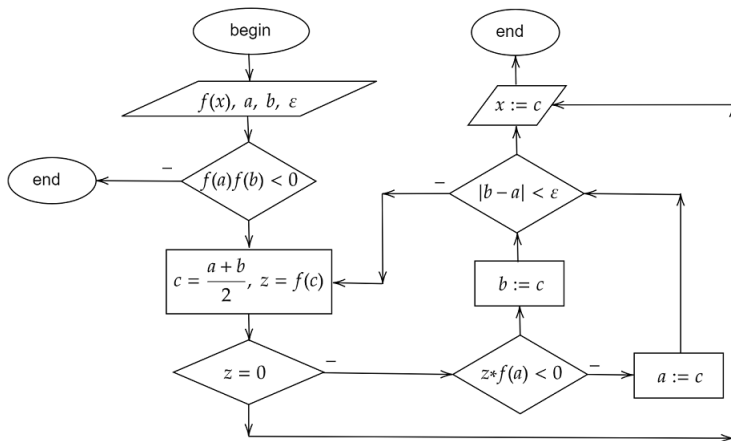
**Chứng minh:**

$$|x_n - \alpha| \leq |b_n - a_n| = |x_n - x_{n-1}| = \frac{b - a}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

**Ví dụ 6.** Với khoảng cách ly  $(1, 2)$ , sau khi thực hiện chia đôi 10 lần ta thu được  $x_{10}$  với sai số

$$|x_{10} - \alpha| \leq \frac{1}{2^{10}} = 0.000976563.$$

## 2.3 Phương pháp chia đôi - Thuật toán



**Hình 2:** Sơ đồ thuật toán chia đôi

### Bài tập ví dụ 1

Tìm hằng số  $e$  với 7 chữ số đáng tin sau dấu phẩy bằng phương pháp chia đôi.

*Hướng dẫn:*

- Phương trình  $\ln(x) - 1 = 0$  có nghiệm duy nhất là  $e$  nên để tính gần đúng  $e$ , có thể dùng phương pháp chia đôi giải gần đúng phương trình với sai số yêu cầu.
- Chọn khoảng  $(2.7, 2.8)$  và chứng minh đây là khoảng cách ly nghiệm của phương trình trên thỏa mãn điều kiện thực hiện phương pháp chia đôi.



*Hướng dẫn:*

- Thiết lập điều kiện dừng qua sai số yêu cầu: Chọn một trong hai cách dưới đây.

**A.** Theo công thức hậu nghiệm:  $|x_n - \alpha| \leq |x_n - x_{n-1}| \leq 0.5 \times 10^{-7}$

**B.** Theo công thức tiên nghiệm:

$$|x_n - \alpha| \leq \frac{|b - a|}{2^n} \leq 0.5 \times 10^{-7} \iff n \geq \frac{\ln \left( \frac{|b - a|}{0.5 \times 10^{-7}} \right)}{\ln 2}$$

## 2.3 Phương pháp chia đôi - Bài tập ví dụ 1



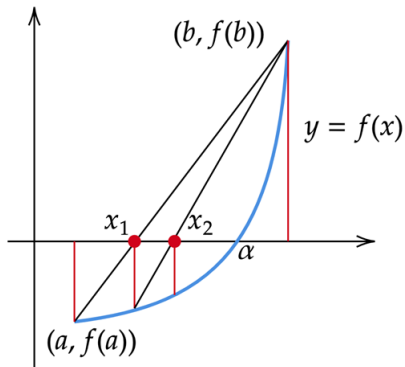
$n$	$a_n$	$b_n$	dấu của $f(x_{n+1})$
0	2.7	2.8	+
1		2.75	+
2		2.725	−
3	2.7125		+
4		2.71875	−
5			
6			
...			

**Bảng I:** Thực hiện phương pháp chia đôi

Trong bảng 1, các giá trị  $x_k$  là điểm chia thứ  $k$  được đặt tại cột  $a_n$  hoặc  $b_n$  thể hiện vai trò của nó trong khoảng cách ly nghiệm mới. Chẳng hạn,  $x_3 = 2.7125$  là xấp xỉ thứ 3 và là cận trái của khoảng cách ly  $(2.7125, 2.725)$  sau 3 lần thực hiện chia đôi.

- 1 Nội dung, mục tiêu
- 2 Bài toán
- 3 Khoảng cách ly nghiệm
- 4 Phương pháp chia đôi
- 5 Phương pháp dây cung**
- 6 Phương pháp tiếp tuyến (Newton)
- 7 Phương pháp lặp đơn

## 2.4 Phương pháp dây cung - Ý tưởng



**Hình 3:** Phương pháp dây cung

Giả sử dây cung thứ  $k$  đi qua hai điểm  $M_k(x_k, f(x_k))$  và  $M(d, f(d))$ .  
Phương trình đường thẳng  $MM_k$ :

$$\frac{x - x_k}{x_k - d} = \frac{y - f(x_k)}{f(x_k) - f(d)}.$$

Gọi giao điểm của  $MM_k$  với trục hoành là  $(x_{k+1}, 0)$ . Khi đó,

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)(x_k - d)}{f(x_k) - f(d)} \quad (3)$$

### Điều kiện

1.  $(a, b)$  là khoảng cách ly nghiệm của phương trình.
2.  $f', f''$  xác định dấu không đổi trên  $[a, b]$ .
3. Chọn đúng điểm mốc  $d$  và xuất phát ban đầu  $x_0$ .

[1] và [2] là các điều kiện thực hiện phương pháp.

[1], [2] và [3] là các điều kiện hội tụ của phương pháp.

### Điểm mốc và điểm xuất phát

- Điểm mốc  $d$  được chọn là điểm thỏa mãn  $f(d)f''(d) > 0$ .
- Điểm xuất phát  $x_0$  được chọn là điểm thỏa mãn  $f(d)f(x_0) < 0$

**Ví dụ 7.** Kiểm tra điều kiện hội tụ của phương pháp dây cung đối với phương trình  $\ln x - 1 = 0$  trên  $(2, 3)$ .

*Giải.*

- $(2, 3)$  là khoảng cách ly nghiệm của phương trình (sv tự kiểm tra).
- $f'(x) = \frac{1}{x} > 0 \forall x \in [2, 3], f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0 \forall x \in [2, 3]$ .
- $f(2)f''(2) > 0$  nên chọn  $d = 2, x_0 = 3$ .



### Định lý về sự hội tụ

Giả sử phương trình  $f(x) = 0$  và khoảng  $(a, b)$  thỏa mãn các điều kiện [1], [2] và [3] (xem slide 31). Khi đó, dãy lặp  $\{x_n\}$  xác định theo công thức (3) luôn hội tụ tới nghiệm đúng  $\alpha$  của phương trình trong  $(a, b)$  với đánh giá sai số:

$$|x_n - \alpha| \leq \frac{|f(x_n)|}{m_1}. \quad (4)$$

$$|x_n - \alpha| \leq \frac{M_1 - m_1}{m_1} |x_n - x_{n-1}|, \quad (5)$$

trong đó,  $m_1 = \min_{[a,b]} |f'(x)|$ ,  $M_1 = \max_{[a,b]} |f'(x)|$ .

### Bài toán 1

Cho phương trình  $f(x) = 0$  và khoảng  $(a, b)$ . Tìm nghiệm xấp xỉ thứ  $n$  bằng phương pháp dây cung và đánh giá sai số.

- B1.** Xác định input.
- B2.** Kiểm tra điều kiện thực hiện của input.
- B3.** Chọn điểm mốc  $d$  và xuất phát ban đầu  $x_0$ .
- B4.** Thực hiện tính các xấp xỉ theo công thức lặp (3).
- B5.** Tính sai số theo công thức (4) hoặc (5).
- B6.** Xác định output.

### Bài toán 2

Cho phương trình  $f(x) = 0$  và khoảng  $(a, b)$ . Tìm nghiệm gần đúng bằng phương pháp dây cung với sai số không vượt quá  $\varepsilon$ .

**B1.** Xác định input.

**B2.** Kiểm tra điều kiện thực hiện của input.

**B3.** Chọn điểm mốc  $d$  và xuất phát ban đầu  $x_0$ .

**B4.** Thiết lập điều kiện dừng từ công thức sai số (4) hoặc (5).

**B5.** Thực hiện tính các xấp xỉ theo công thức lặp (3) cho đến khi thỏa mãn điều kiện dừng.

**B6.** Xác định output.

### Bài tập ví dụ 2

Tính đến nghiệm xấp xỉ thứ 5 của phương trình  $\ln x - 1 = 0$  trên  $(2, 3)$  bằng phương pháp dây cung và đánh giá sai số cho  $x_5$ .

*Hướng dẫn:*

**B1.** Xác định input:  $f(x) = \ln x - 1$ ,  $a = 2$ ,  $b = 3$ ,  $n = 5$

**B2.** Kiểm tra điều kiện thực hiện của input:

$$f'(x) = \frac{1}{x} > 0 \quad \forall x \in [2, 3] \Rightarrow f(x) \text{ đơn điệu tăng trên } [2, 3]$$

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0 \quad \forall x \in [2, 3]. \quad f(2) = -0.306852819, \quad f(3) = 0.098612289$$
$$\Rightarrow f(2)f(3) < 0 \Rightarrow (2, 3) \text{ là khoảng cách ly nghiệm của phương trình.}$$

### Bài tập ví dụ 2

Tính đến nghiệm xấp xỉ thứ 5 của phương trình  $\ln x - 1 = 0$  trên  $(2, 3)$  bằng phương pháp dây cung và đánh giá sai số cho  $x_5$ .

*Hướng dẫn:*

**B3.** Xác định yếu tố ban đầu:  $f(2)f'' > 0 \Rightarrow d = 2, x_0 = 3$ .

**B4.** Tính các xấp xỉ: Theo công thức lặp của phương pháp dây cung (3), ta có:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)(x_k - d)}{f(x_k) - f(d)} = x_k - \frac{(\ln x_k - 1)(x_k - 2)}{\ln x_k - 1 + 0.306852819}$$

## 2.4 Phương pháp dây cung



$k$	0	1	2
$x_k$	3	2.756792171	2.723617729
$k$	3	4	5
$x_k$	2.719022578	2.71838469	2.718296112

**Bảng II:** Các xấp xỉ nghiệm tính theo phương pháp dây cung

### Bài tập ví dụ 2

Tính đến nghiệm xấp xỉ thứ 5 của phương trình  $\ln x - 1 = 0$  trên  $(2, 3)$  bằng phương pháp dây cung và đánh giá sai số cho  $x_5$ .

*Hướng dẫn:*

**B5.** Đánh giá sai số:

$$M_1 = \max_{[2,3]} |f'(x)| = f'(2) = 0.5, \quad m_1 = \min_{[2,3]} |f'(x)| = f'(3) = 1/3$$

$$|x_5 - \alpha| \leq \frac{M_1 - m_1}{m_1} |x_5 - x_4| = 4.42886 \times 10^{-5}$$

**B6.** Xác định output:  $\alpha = x_5 \pm \Delta x_5 = 2.718296112 \pm 4.42886 \times 10^{-5}$

### Bài tập ví dụ 3

Tìm nghiệm gần đúng của phương trình  $\ln x - 1 = 0$  trên  $(2, 3)$  bằng phương pháp dây cung với tám chữ số đáng tin.

*Hướng dẫn:*

**B1-3.** Xem bài tập ví dụ 2.



### B4. Thiết lập điều kiện dừng:

$$M_1 = \max_{[2,3]} |f'(x)| = f'(2) = 0.5, \quad m_1 = \min_{[2,3]} |f'(x)| = f'(3) = 1/3$$

$$|x_n - \alpha| \leq \frac{M_1 - m_1}{m_1} |x_n - x_{n-1}| \leq 0.5 \times 10^{-7}$$

$$\Leftrightarrow |x_n - x_{n-1}| \leq 0.5 \times 10^{-7} \frac{m_1}{M_1 - m_1} = 10^{-7}$$

Điều kiện dừng:  $x_n$  và  $x_{n-1}$  trùng đến chữ số có thứ nguyên  $10^{-7}$ .

**B5.** Thực hiện tính các xấp xỉ theo công thức lặp (3) cho đến khi thỏa mãn điều kiện dừng.

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)(x_k - d)}{f(x_k) - f(d)} = x_k - \frac{(\ln x_k - 1)(x_k - 2)}{\ln x_k - 1 + 0.306852819}$$

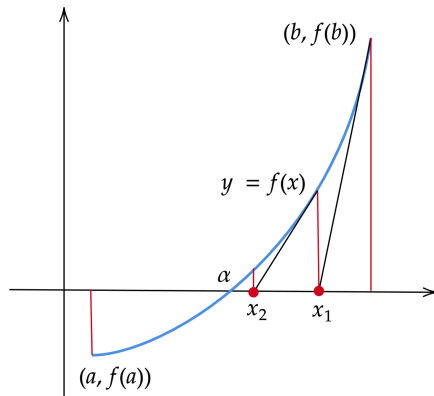
$k$	0	1	2	3	4
$x_k$	3	2.756792171	2.723617729	2.719022578	2.71838469
$k$	5	6	7	8	9
$x_k$	2.718296112	2.718283812	2.718282104	2.718281867	2.718281834

**Bảng III:** Các xấp xỉ nghiệm của phương trình tính theo công thức (3)

**B6.** Xác định output:  $\alpha \approx 2.718281834$ .

- 1 Nội dung, mục tiêu
- 2 Bài toán
- 3 Khoảng cách ly nghiệm
- 4 Phương pháp chia đôi
- 5 Phương pháp dây cung
- 6 Phương pháp tiếp tuyến (Newton)**
- 7 Phương pháp lặp đơn

## 2.5 Phương pháp tiếp tuyến (phương pháp Newton)



**Hình 4:** Phương pháp tiếp tuyến

Giả sử tiếp tuyến thứ  $k$  với tiếp điểm  $M_k(x_k, f(x_k))$  là  $d_k$   
Phương trình đường thẳng tiếp tuyến  $d_k$ :

$$y = f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k)$$

Gọi giao điểm của  $d_k$  với trục hoành là  $(x_{k+1}, 0)$ . Khi đó,

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad (6)$$

### Điều kiện

1.  $(a, b)$  là khoảng cách ly nghiệm của phương trình.
2.  $f', f''$  xác định dấu không đổi trên  $[a, b]$ .
- 3'. Chọn điểm xuất phát ban đầu  $x_0$  thỏa mãn  $f(x_0)f''(x_0) > 0$ .

[1] và [2] là các điều kiện thực hiện phương pháp.

[1], [2] và [3'] là các điều kiện hội tụ của phương pháp.

**Ví dụ 8.** Kiểm tra điều kiện hội tụ của phương pháp tiếp tuyến đối với phương trình  $x^5 - 21 = 0$  trên  $(1, 2)$ .

*Giải.*

- $(1, 2)$  là khoảng cách ly nghiệm của phương trình (sv tự kiểm tra).
- $f'(x) = 5x^4 > 0 \forall x \in [1, 2], f''(x) = 20x^3 > 0 \forall x \in [1, 2]$ .
- $f(2)f''(2) > 0$  nên chọn  $x_0 = 2$ .

Vậy các điều kiện hội tụ của phương pháp tiếp tuyến đối với phương trình trên là thỏa mãn.



### Định lý về sự hội tụ

Giả sử phương trình  $f(x) = 0$  và khoảng  $(a, b)$  thỏa mãn các điều kiện [1], [2] và [3'] (xem slide 47). Khi đó, dãy lặp  $\{x_n\}$  xác định theo công thức (6) luôn hội tụ tới nghiệm đúng  $\alpha$  của phương trình trong  $(a, b)$  với đánh giá sai số:

$$|x_n - \alpha| \leq \frac{|f(x_n)|}{m_1}. \quad (7)$$

$$|x_n - \alpha| \leq \frac{M_2}{2m_1} |x_n - x_{n-1}|^2, \quad (8)$$

trong đó,  $m_1 = \min_{[a,b]} |f'(x)|$ ,  $M_2 = \max_{[a,b]} |f''(x)|$ .

### Bài toán 1

Cho phương trình  $f(x) = 0$  và khoảng  $(a, b)$ . Tìm nghiệm xấp xỉ thứ  $n$  bằng phương pháp tiếp tuyến và đánh giá sai số.

- B1.** Xác định input.
- B2.** Kiểm tra điều kiện thực hiện của input.
- B3.** Chọn điểm xuất phát ban đầu  $x_0$ .
- B4.** Thực hiện tính các xấp xỉ theo công thức lặp (6).
- B5.** Tính sai số theo công thức (7) hoặc (8).
- B6.** Xác định output.

### Bài toán 2

Cho phương trình  $f(x) = 0$  và khoảng  $(a, b)$ . Tìm nghiệm gần đúng bằng phương pháp tiếp tuyến với sai số không vượt quá  $\varepsilon$ .

- B1.** Xác định input.
- B2.** Kiểm tra điều kiện thực hiện của input.
- B3.** Chọn điểm xuất phát ban đầu  $x_0$ .
- B4.** Thiết lập điều kiện dừng từ công thức sai số (7) hoặc (8).
- B5.** Thực hiện tính các xấp xỉ theo công thức lặp (6) cho đến khi thỏa mãn điều kiện dừng.
- B6.** Xác định output.

### Bài tập ví dụ 4

Tính đến nghiệm xấp xỉ thứ 5 của phương trình  $x^4 - 27 = 0$  trên  $(2, 3)$  bằng phương pháp tiếp tuyến và đánh giá sai số cho  $x_5$ .

*Hướng dẫn:*

**B1.** Xác định input:  $f(x) = x^4 - 27$ ,  $a = 2$ ,  $b = 3$ ,  $n = 5$

**B2.** Kiểm tra điều kiện thực hiện của input:

$$f'(x) = 4x^3 > 0 \quad \forall x \in [2, 3] \Rightarrow f(x) \text{ đơn điệu tăng trên } [2, 3]$$

$$f''(x) = 12x^2 > 0 \quad \forall x \in [2, 3]$$

$$f(2) = -11, \quad f(3) = 54 \Rightarrow f(a)f(b) < 0 \Rightarrow (a, b) \text{ là khoảng cách ly nghiệm của phương trình.}$$

**B3.** Xác định yếu tố ban đầu:  $f(3)f'' > 0 \Rightarrow x_0 = 3$ .

**B4.** Tính các xấp xỉ: Theo công thức lặp của phương pháp tiếp tuyến (6), ta có:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{x_k^4 - 27}{4x_k^3}$$

$k$	0	1	2	3	4	5
$x_k$	3	2.5	2.307	2.279994622	2.279507213	2.279507057

**Bảng IV:** Các xấp xỉ nghiệm tính theo phương pháp tiếp tuyến

**B5.** Đánh giá sai số:

$$M_2 = \max_{[2,3]} |f''(x)| = f''(3) = 108, \quad m_1 = \min_{[2,3]} |f'(x)| = f'(2) = 32.$$

$$\begin{aligned} |x_5 - \alpha| &\leq \frac{M_2}{2m_1} |x_5 - x_4|^2 + \Delta_{\text{làm tròn}} \\ &= 4.12633 \times 10^{-14} + 0.5 \times 10^{-9} \approx 0.5 \times 10^{-9}. \end{aligned}$$

**B6.** Xác định output:

$$\alpha = x_5 \pm \Delta x_5 = 2.279507057 \pm 0.5 \times 10^{-9}.$$

### Bài tập ví dụ 5

Tìm nghiệm gần đúng của phương trình  $x^4 - 27 = 0$  trên  $(2, 3)$  bằng phương pháp tiếp tuyến với tám chữ số đáng tin.

*Hướng dẫn:*

**B1-3.** Xem bài tập ví dụ 4.

**B4.** Thiết lập điều kiện dừng:

$$M_2 = \max_{[2,3]} |f''(x)| = f''(3) = 108, \quad m_1 = \min_{[2,3]} |f'(x)| = f'(2) = 32.$$

$$|x_n - \alpha| \leq \frac{M_2}{2m_1} |x_n - x_{n-1}|^2 \leq 0.5 \times 10^{-7}$$

$$\Leftrightarrow |x_n - x_{n-1}| \leq \sqrt{0.5 \times 10^{-7} \frac{2m_1}{M_2}} = 0.172132593 \times 10^{-3}$$

Điều kiện dừng:  $x_n$  và  $x_{n-1}$  trùng đến chữ số có thứ nguyên  $10^{-4}$ .



**B5.** Thực hiện tính các xấp xỉ theo công thức lặp (6) cho đến khi thỏa mãn điều kiện dừng.

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{x_k^4 - 27}{4x_k^3}$$

$k$	0	1	2	3	4	5
$x_k$	3	2.5	2.307	2.279994622	2.279507213	2.279507057

**Bảng V:** Các xấp xỉ nghiệm của bài toán theo công thức (6)

**B6.** Xác định output:  $\alpha \approx 2.279507057$ .

- ① Nội dung, mục tiêu
- ② Bài toán
- ③ Khoảng cách ly nghiệm
- ④ Phương pháp chia đôi
- ⑤ Phương pháp dây cung
- ⑥ Phương pháp tiếp tuyến (Newton)
- ⑦ Phương pháp lặp đơn**

### Ý tưởng

- Tạo phương trình lặp  $x = \varphi(x)$  tương đương với phương trình  $f(x) = 0$ .
- Công thức lặp tương ứng với phương trình lặp

$$x_{k+1} = \varphi(x_k) \quad (9)$$

- Nếu  $\exists \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \alpha$  và  $\varphi(x)$  liên tục thì  $\alpha = \varphi(\alpha)$

### Điều kiện hội tụ

1.  $(a, b)$  là khoảng cách ly nghiệm của phương trình.
2.  $|\varphi'(x)| \leq q < 1 \quad \forall x \in [a, b]$ .

**Ví dụ 9.** Kiểm tra điều kiện hội tụ của phương pháp lặp đơn đối với phương trình  $x = \frac{1}{x+3}$  trên  $(0, 1)$ .

*Giải.*

- $(0, 1)$  là khoảng cách ly nghiệm của phương trình (sv tự kiểm tra).
- $|\varphi'(x)| = \frac{1}{(x+3)^2} \leq 0.112 = q \quad \forall x \in [0, 1]$

Vậy các điều kiện hội tụ của phương pháp lặp đơn đối với phương trình trên là thỏa mãn.

### Định lý 3 (Định lý về sự hội tụ)

*Giả sử phương trình  $x = \varphi(x)$  và khoảng  $(a, b)$  thỏa mãn các điều kiện [1], [2] (xem slide 60). Khi đó, với mọi  $x_0 \in [a, b]$ , dãy lặp  $\{x_n\}$  xác định theo công thức (9) luôn hội tụ tới nghiệm đúng  $\alpha$  của phương trình trong  $(a, b)$  với đánh giá sai số:*

$$\text{Công thức tiên nghiệm: } |x_n - \alpha| \leq \frac{q^n}{1 - q} |x_1 - x_0|. \quad (10)$$

$$\text{Công thức hậu nghiệm: } |x_n - \alpha| \leq \frac{q}{1 - q} |x_n - x_{n-1}|. \quad (11)$$

### Bài toán 1

Cho phương trình  $f(x) = 0$  và khoảng  $(a, b)$ . Tìm nghiệm xấp xỉ thứ  $n$  bằng phương pháp lặp đơn và đánh giá sai số.

- B1.** Xác định input.
- B2.** Kiểm tra điều kiện thực hiện của input.
- B3.** Chọn điểm xuất phát ban đầu  $x_0$ .
- B4.** Thực hiện tính các xấp xỉ theo công thức lặp (9).
- B5.** Tính sai số theo công thức (10) hoặc (11).
- B6.** Xác định output.

### Bài toán 2

Cho phương trình  $f(x) = 0$  và khoảng  $(a, b)$ . Tìm nghiệm gần đúng bằng phương pháp lặp đơn với sai số không vượt quá  $\varepsilon$ .

- B1.** Xác định input.
- B2.** Kiểm tra điều kiện thực hiện của input.
- B3.** Chọn điểm xuất phát ban đầu  $x_0$ .
- B4.** Thiết lập điều kiện dừng từ công thức sai số (10) hoặc (11).
- B5.** Thực hiện tính các xấp xỉ theo công thức lặp (9) cho đến khi thỏa mãn điều kiện dừng.
- B6.** Xác định output.



### Bài tập ví dụ 6

Tính đến nghiệm xấp xỉ thứ 5 của phương trình  $x = \frac{1}{x+3}$  trên  $(0, 1)$  bằng phương pháp lặp đơn và đánh giá sai số cho  $x_5$  với  $x_0 = 0$ .

*Hướng dẫn:*

**B1.** Xác định input:

$$\varphi(x) = \frac{1}{x+3}, \quad a = 0, \quad b = 1, \quad n = 5$$

**B2.** Kiểm tra điều kiện thực hiện của input:

$$f(x) = x - \frac{1}{x+3}, \quad f'(x) = 1 + \frac{1}{(x+3)^2} \quad \forall x \in [0, 1]$$

$\Rightarrow f(x)$  đơn điệu tăng trên  $[0, 1]$ .

$$f(0) = -1/3, \quad f(1) = 3/4 \Rightarrow f(0)f(1) < 0$$

$\Rightarrow (0, 1)$  là khoảng cách ly nghiệm của phương trình.

$$|\varphi'(x)| = \frac{1}{(x+3)^2} \leq 0.112 = q \quad \forall x \in [0, 1].$$

Vậy dãy lặp  $x_{k+1} = \varphi(x_k)$  hội tụ đến nghiệm đúng của phương trình.

**B3.** Xác định yếu tố ban đầu:  $x_0 = 0$  (theo đề bài).

**B4.** Tính các xấp xỉ:

$$x_{k+1} = \varphi(x_k) = \frac{1}{x_k + 3}$$

$k$	0	1	2	3	4	5
$x_k$	0	0.333333333	0.3	0.303030303	0.302752294	0.302777778

**Bảng VI:** Xấp xỉ nghiệm tính theo phương pháp lặp đơn

**B5.** Đánh giá sai số:  $|x_5 - \alpha| \leq \frac{q}{1 - q} |x_5 - x_4| = 3.18552 \times 10^{-6}$

**B6.** Xác định output:  $\alpha = x_5 \pm \Delta x_5 = 0.302777778 \pm 3.18552 \times 10^{-6}$

### Bài tập ví dụ 7

Tìm nghiệm gần đúng của phương trình  $x = \frac{1}{x+3}$  trên  $(0, 1)$  bằng phương pháp lặp đơn với chữ số đáng tin cuối cùng có thứ nguyên  $10^{-7}$ .

*Hướng dẫn:*

**B1-3.** Xem bài tập ví dụ 6

**B4.** Thiết lập điều kiện dừng:

$$|x_n - \alpha| \leq \frac{q^n}{1 - q} |x_1 - x_0| \leq 0.5 \times 10^{-7}$$
$$\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln \left( \frac{0.5 \times 10^{-7}(1 - q)}{|x_1 - x_0|} \right)}{\ln q} = 7.21 \Rightarrow n = 8.$$

Điều kiện dừng: Tính đến  $x_8$ .

**B5.** Thực hiện tính các xấp xỉ theo công thức lặp (9) cho đến khi thỏa mãn điều kiện dừng.

$$x_{k+1} = \varphi(x_k) = \frac{1}{x_k + 3} = \frac{1}{x_k + 3}$$

$k$	0	1	2	3	4
$x_k$	0	0.333333333	0.3	0.303030303	0.302752294
$k$		5	6	7	8
$x_k$		0.302777778	0.302775442	0.302775656	0.302775636

**Bảng VII:** Xấp xỉ nghiệm tính theo công thức (9)

**B6.** Xác định output:  $\alpha \approx 0.302775636$ .