

## CHƯƠNG 4 XẤP XỈ HÀM SỐ

Nhóm phương pháp tính <sup>(1)</sup>

KHOA TOÁN - TIN  
ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI

01/2024

---

<sup>(1)</sup>Email: [yen.hathingoc@hust.edu.vn](mailto:yen.hathingoc@hust.edu.vn)

- 1 Nội dung, mục tiêu
- 2 Bài toán nội suy
- 3 Sơ đồ Horner và ứng dụng
- 4 Đa thức nội suy Lagrange
- 5 Đa thức nội suy Newton
- 6 Phương pháp bình phương tối thiểu

## Nội dung Chương 4

- 4.1 Bài toán nội suy
- 4.2 Sơ đồ Horner và ứng dụng
- 4.3 Đa thức nội suy Lagrange
- 4.4 Đa thức nội suy Newton
- 4.5 Phương pháp bình phương tối thiểu

## Mục tiêu chương 4

- 1 Sử dụng được sơ đồ Horner tính giá trị đa thức, phép chia và phép nhân đa thức với  $x - c$ , tính đạo hàm của đa thức.
- 2 Xây dựng được đa thức nội suy bằng các công thức nội suy Lagrange và Newton.
- 3 Sử dụng đa thức nội suy tính gần đúng giá trị của  $f(x)$  và  $f'(x)$  và ước lượng sai số cho giá trị tính được.
- 4 Xác định được hàm thực nghiệm với dạng cho trước phù hợp với dữ liệu đầu vào.
- 5 Viết được thuật toán và sơ đồ khối cho các phương pháp.

- 1 Nội dung, mục tiêu
- 2 Bài toán nội suy**
- 3 Sơ đồ Horner và ứng dụng
- 4 Đa thức nội suy Lagrange
- 5 Đa thức nội suy Newton
- 6 Phương pháp bình phương tối thiểu

### Phát biểu bài toán

Cho tập  $n + 1$  điểm  $S = \{(x_i, y_i), i = \overline{0, n}\}$ . Tìm đa thức bậc không quá  $n$  đi qua tất cả các điểm của  $S$ .

Cụ thể là tìm  $P \in \mathbb{P}[x]$ ,  $P(x_i) = y_i \forall i = \overline{0, n}$ . Khi đó,  $P$  được gọi là đa thức nội suy tương ứng với  $S$ .

### Định nghĩa 1

Cho  $P$  là đa thức nội suy tương ứng với tập điểm  $S = \{(x_i, y_i), i = \overline{0, n}\}$ . Khi đó, ta gọi:

- $S$  là tập các điểm nội suy,
- $(x_i, y_i)$  là điểm nội suy,
- $x_i, y_i$  tương ứng là mốc nội suy và giá trị nội suy,
- $a := \min \{x_i, i = \overline{0, n}\}$ ,  $b := \max \{x_i, i = \overline{0, n}\}$ ,  $(a, b)$  là khoảng nội suy,
- phép xấp xỉ  $f(x) \approx P(x)$ ,  $x \in (a, b)$  là phép nội suy,
- phép xấp xỉ  $f(x) \approx P(x)$ ,  $x \notin (a, b)$  là phép ngoại suy.

### Định lý 1

Cho tập điểm nội suy  $S = \{(x_i, y_i), i = \overline{0, n}\}$  với các mốc nội suy đôi một khác nhau

$$x_i \neq x_j \quad \forall i \neq j \quad (1)$$

Khi đó, tồn tại duy nhất một đa thức nội suy tương ứng với  $S$ .



### Định lý 2

Cho tập điểm nội suy  $S = \{(x_i, y_i = f(x_i)), i = \overline{0, n}\}$  với các mốc nội suy đôi một khác nhau. Giả sử hàm  $f(x)$  trơn đến cấp  $n + 1$  và  $P$  là đa thức nội suy tương ứng với  $S$ . Khi đó, với mỗi giá trị  $x \in \mathbb{R}$ , ta có:

$$|f(x) - P(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \left| \prod_{i=0}^n (x - x_i) \right| \quad (2)$$

trong đó,  $M_{n+1} \geq \max_{[a,b]} |f^{(n+1)}(x)|$ .

- 1 Nội dung, mục tiêu
- 2 Bài toán nội suy
- 3 Sơ đồ Horner và ứng dụng**
- 4 Đa thức nội suy Lagrange
- 5 Đa thức nội suy Newton
- 6 Phương pháp bình phương tối thiểu

### Tính giá trị đa thức và phép chia đa thức

$P(c) = ?$  biết  $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$

(+)	$a_n$	$a_{n-1}$	$a_{n-2}$	$\dots$	$a_1$	$a_0$
c		$b_nc$	$b_{n-1}c$	$\dots$	$b_2c$	$b_1c$
	$b_n$	$b_{n-1}$	$b_{n-2}$	$\dots$	$b_1$	$b_0$

$$\begin{cases} b_n = a_n \\ b_k = b_{k+1}c + a_k, \quad k = \overline{n-1, 0} \end{cases} \quad (3)$$

### Tính giá trị đa thức và phép chia đa thức

$$P(c) = ? \text{ biết } P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$$

(+)	$a_n$	$a_{n-1}$	$a_{n-2}$	$\dots$	$a_1$	$a_0$
c		$b_nc$	$b_{n-1}c$	$\dots$	$b_2c$	$b_1c$
	$b_n$	$b_{n-1}$	$b_{n-2}$	$\dots$	$b_1$	$b_0$

$$\begin{cases} P(c) &= b_0 \\ \frac{P(x)}{x-c} &= b_nx^{n-1} + b_{n-1}x^{n-2} + \cdots + b_2x + b_1 + \frac{b_0}{x-c} \end{cases} \quad (4)$$

Ví dụ: xem II slide 22

### Phép nhân đa thức

$$P(x)(x - c) = ? \text{ biết } P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$$

(-)	$a_n$	$a_{n-1}$	$a_{n-2}$	$\dots$	$a_1$	$a_0$	
c		$a_nc$	$a_{n-1}c$	$\dots$	$a_2c$	$a_1c$	$a_0c$
	$b_{n+1}$	$b_n$	$b_{n-1}$	$\dots$	$b_2$	$b_1$	$b_0$

$$\begin{cases} b_{n+1} &= a_n \\ b_k &= -a_kc + a_{k-1}, \quad k = \overline{n, 1} \\ b_0 &= -a_0c \end{cases} \quad (5)$$

### Phép nhân đa thức - Sơ đồ rút gọn

$$P(x)(x - c) = ? \text{ biết } P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$$

(-)		$a_n$	$a_{n-1}$	$a_{n-2}$	$\dots$	$a_1$	$a_0$
c	$b_{n+1}$	$b_n$	$b_{n-1}$	$b_2$	$\dots$	$b_1$	$b_0$

$$\begin{cases} b_{n+1} &= a_n \\ b_k &= -a_k c + a_{k-1}, \quad k = \overline{n, 1} \\ b_0 &= -a_0 c \end{cases}$$

Ví dụ: xem slide 21, 35, 43.

- 1 Nội dung, mục tiêu
- 2 Bài toán nội suy
- 3 Sơ đồ Horner và ứng dụng
- 4 Đa thức nội suy Lagrange**
- 5 Đa thức nội suy Newton
- 6 Phương pháp bình phương tối thiểu

### Đa thức Lagrange cơ bản

Đa thức  $L_i \in \mathbb{P}[x]$  thỏa mãn điều kiện:

$$L_i(x_j) = \begin{cases} 0 & j \neq i \\ 1 & j = i \end{cases} \quad (6)$$

được gọi là đa thức Lagrange cơ bản tương ứng với mốc nội suy  $x_i$ .



### Đa thức Lagrange cơ bản

Cụ thể là:

$$\begin{cases} D_i &= \frac{1}{(x_i - x_0) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})(x_i - x_n)} \\ L_i(x) &= D_i \prod_{j \neq i} (x - x_j) \end{cases} \quad (7)$$

### Công thức nội suy Lagrange

Dạng 1.

$$\left\{ \begin{array}{l} D_i = \frac{1}{(x_i - x_0) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})(x_i - x_n)} \\ P(x) = \sum_{i=0}^n y_i L_i(x) = \sum_{i=0}^n y_i D_i \prod_{j \neq i} (x - x_j) \end{array} \right. \quad (8)$$

### Công thức nội suy Lagrange

Dạng 2

$$\left\{ \begin{array}{l} D_i = \frac{1}{(x_i - x_0) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})(x_i - x_n)} \\ P(x) = \prod_{j=0}^n (x - x_j) \sum_{i=0}^n \frac{y_i D_i}{x - x_i} = \sum_{i=0}^n \frac{y_i D_i w_{n+1}(x)}{x - x_i}. \end{array} \right. \quad (9)$$

**Ví dụ 1.** Xây dựng đa thức nội suy Lagrange (dạng chính tắc) tương ứng với tập điểm nội suy cho trong bảng dưới đây và tính gần đúng giá trị hàm số và đạo hàm của  $n$  tại  $x = 2.5$ .

$x_i$	2.1	2.3	2.4	2.6	2.7
$y_i$	8.0241	10.5346	12.0174	15.4766	17.468

**Cách làm.**

1. Tính tích  $w_5(x) = (x - 2.1)(x - 2.3)(x - 2.4)(x - 2.6)(x - 2.7)$ .
2. Xác định các đa thức Lagrange cơ bản theo công thức  $L_i(x) = \frac{D_i w_5(x)}{x - x_i}$ .
3. Xác định đa thức nội suy theo công thức  $P_4(x) = y_0 L_0(x) + \cdots + y_5 L_5(x)$ .

### Lời giải cho Ví dụ 1.

Dùng sơ đồ tích tính  $w_5(x) = (x - 2.1)(x - 2.3)(x - 2.4)(x - 2.6)(x - 2.7)$ .

2.1	0	0	0	0	1	-2.1
2.3	0	0	0	1	-4.4	4.83
2.4	0	0	1	-6.8	15.39	-11.592
2.6	0	1	-9.4	33.07	-51.606	30.1392
2.7	1	-12.1	58.45	-140.895	169.4754	-81.37584

**Bảng 1:** Bảng tính nhân đa thức

Vậy ta có  $w_5(x) = x^5 - 12.1x^4 + 58.45x^3 - 140.895x^2 + 169.4754x - 81.37584$ .

### Lời giải cho Ví dụ 1.

Dùng sơ đồ thương tính các thương  $\frac{w_5(x)}{x - x_i}$ .

	1	-12.1	58.45	-140.895	169.4754	-81.37584
2.1	1	-10	37.45	-62.25	38.7504	0
2.3	1	-9.8	35.91	-58.302	35.3808	0
2.4	1	-9.7	35.17	-56.487	33.9066	0
2.6	1	-9.5	33.75	-53.145	31.2984	0
2.7	1	-9.4	33.07	-51.606	30.1392	0

**Bảng II:** Bảng tính chia đa thức

### Lời giải cho Ví dụ 1.

Từ bảng thương ta có các đa thức Lagrange cơ bản:

$$\begin{aligned}L_0(x) &= \frac{D_0 w_5(x)}{x - x_0} = \frac{1}{0.018} (x^4 - 10x^3 + 37.45x^2 - 62.25x + 38.7504), \\L_1(x) &= \frac{D_1 w_5(x)}{x - x_1} = \frac{1}{-0.0024} (x^4 - 9.8x^3 + 35.91x^2 - 58.302x + 35.3808), \\L_2(x) &= \frac{D_2 w_5(x)}{x - x_2} = \frac{1}{0.0018} (x^4 - 9.7x^3 + 35.17x^2 - 56.487x + 33.9066), \\L_3(x) &= \frac{D_3 w_5(x)}{x - x_3} = \frac{1}{-0.003} (x^4 - 9.5x^3 + 33.75x^2 - 53.145x + 31.2984), \\L_4(x) &= \frac{D_4 w_5(x)}{x - x_4} = \frac{1}{0.0072} (x^4 - 9.4x^3 + 33.07x^2 - 51.606x + 30.1392).\end{aligned}$$

### Lời giải cho Ví dụ 1.

Do đó, ta thu được đa thức nội suy Lagrange:

$$\begin{aligned} P(x) &= y_0L_0(x) + y_1L_1(x) + y_2L_2(x) + y_2L_2(x) + y_3L_3(x) + y_4L_4(x) \\ &= -0.05555556x^4 + 1.80555556x^3 - 2.97888889x^2 + 1.796x + 1.7486. \end{aligned}$$



### Lời giải cho Ví dụ 1.

Cuối cùng, dùng sơ đồ Horner tính giá trị đa thức và đạo hàm tại  $x = 2.5$ .

	-0.05555556	1.80555556	-2.97888889	1.796	1.7486
2.5	-0.05555556	1.66666667	1.18777778	4.76544445	13.66221111
	-0.05555556	1.52777778	5.00722222	17.2835	

Từ đó, ta có các giá trị cần tìm:

$$f(2.5) \approx P(2.5) = 13.66221111 \quad \text{và} \quad f'(2.5) \approx P'(2.5) = 17.2835.$$

- 1 Nội dung, mục tiêu
- 2 Bài toán nội suy
- 3 Sơ đồ Horner và ứng dụng
- 4 Đa thức nội suy Lagrange
- 5 Đa thức nội suy Newton**
- 6 Phương pháp bình phương tối thiểu

### Định nghĩa 2

*Tỷ sai phân của hàm số tại các mốc nội suy được định nghĩa quy nạp như sau:*

- *Tỷ sai phân cấp 1*

$$f[x_k, x_{k+1}] = \frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k} \quad (10)$$

- *Tỷ sai phân cấp 2*

$$f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}] = \frac{f[x_{k+1}, x_{k+2}] - f[x_k, x_{k+1}]}{x_{k+2} - x_k} \quad (11)$$

Ví dụ: xem slide 34.

### Định nghĩa 2

Tỷ sai phân của hàm số tại các mốc nội suy được định nghĩa quy nạp như sau:

- Tỷ sai phân cấp  $s$

$$f[x_k, \dots, x_{k+s}] = \frac{f[x_{k+1}, \dots, x_{k+s}] - f[x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+s-1}]}{x_{k+s} - x_k} \quad (12)$$

Ví dụ: xem slide 34.

### Xây dựng công thức

$$f[x, x_0] = \frac{f(x) - y_0}{x - x_0} \implies f(x) = y_0 + f[x, x_0](x - x_0) = P_0(x) + R_0(x)$$

$$f[x, x_0, x_1] = \frac{f[x, x_0] - f[x_0, x_1]}{x - x_1}$$

$$\implies f[x, x_0] = f[x_0, x_1] + f[x, x_0, x_1](x - x_1)$$

$$\begin{aligned} \implies f(x) &= P_0 + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x, x_0, x_1](x - x_0)(x - x_1) \\ &= P_1(x) + R_1(x) \end{aligned}$$

### Công thức nội suy Newton mốc bất kỳ

$$\begin{aligned} P(x) = & y_0 + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \\ & + f[x_0, \dots, x_3](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \\ & + \dots \\ & + f[x_0, \dots, x_n](x - x_0) \dots (x - x_{n-1}). \end{aligned} \tag{13}$$

### Định nghĩa 3

*Khi các mốc nội suy được sắp theo thứ tự tăng dần*

$$x_0 < x_1 < \dots < x_n$$

*thì công thức nội suy (13) được gọi là công thức nội suy Newton tiến.*

*Khi các mốc nội suy được sắp theo thứ tự giảm dần*

$$x_0 > x_1 > \dots > x_n$$

*thì công thức nội suy (13) được gọi là công thức nội suy Newton lùi.*

### Định nghĩa 4

*Các mốc nội suy  $\{x_i, i = \overline{0, n}\}$  được gọi là các mốc cách đều nếu*

$$x_k = x_0 + kh, \quad k = \overline{0, n}, \quad h = \frac{b - a}{n}$$



**Ví dụ 2.** Cho hàm  $y = f(x)$  thỏa mãn bảng dữ liệu dưới đây.

$k$	0	1	2	3	4
$x_k$	3.2	3.5	3.7	3.8	4.1
$y_k$	30.3222	40.5807	48.5752	52.9341	67.5127

1. Xây dựng đa thức nội suy Newton tiến mốc bất kỳ (dạng chính tắc).
2. Tính gần đúng giá trị  $y(3.6)$  và  $y'(3.6)$ .

**Lời giải.** Lập bảng tỷ sai phân

$x_i$	$y_i$	TSP1	TSP2	TSP3	TSP4
3.2	30.3222				
3.5	40.5807	34.195			
3.7	48.5752	39.9725	11.555		
3.8	52.9341	43.589	12.055	0.833333333	
4.1	67.5127	48.59533333	12.51583333	0.768055556	-0.072530864

### Lời giải ví dụ 2.

Lập bảng tính tích  $(x - 3.2)(x - 3.5)(x - 3.7)(x - 3.8)$

	0	0	0	0	1
3.2	0	0	0	1	-3.2
3.5	0	0	1	-6.7	11.2
3.7	0	1	-10.4	35.99	-41.44
3.8	1	-14.2	75.51	-178.202	157.472

### Lời giải ví dụ 2.

Thiết lập đa thức nội suy Newton tiến:

$$\begin{aligned}P(x) &= y_0 + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \cdots \\&= + f[x_0, x_1, \dots, x_4](x - x_0) \dots (x - x_3) \\&= 30.3222 + 34.195(x - 3.2) + 11.555(x - 3.2)(x - 3.5) \\&\quad + 0.833333333(x - 3.2)(x - 3.5)(x - 3.7) \\&\quad - 0.072530864(x - 3.2)(x - 3.5)(x - 3.7)(x - 3.8) \\&= -0.072530864x^4 + 1.863271605x^3 - 2.588472222x^2 \\&\quad - 0.306688271x + 4.359286419.\end{aligned}$$

### Lời giải ví dụ 2.

Tính xấp xỉ tại  $x = 3.6$  ta thu được kết quả

$$y(3.6) \approx P(3.6) = 44.45900864$$

và

$$y'(3.6) \approx P'(3.6) = 39.96431173.$$

### Định nghĩa 5

*Sai phân của hàm số tại các mốc nội suy được định nghĩa quy nạp như sau:*

- Sai phân tiến cấp 1 từ  $x_k$  và sai phân lùi cấp 1 từ  $x_{k+1}$

$$\Delta y_k = y_{k+1} - y_k = \nabla y_{k+1} \quad (14)$$

- Sai phân tiến cấp 2 từ  $x_k$  và sai phân lùi cấp 2 từ  $x_{k+2}$

$$\Delta^2 y_k = \Delta y_{k+1} - \Delta y_k = \nabla y_{k+2} - \nabla y_{k+1} = \nabla^2 y_{k+2} \quad (15)$$

- Sai phân tiến cấp  $s$  từ  $x_k$  và sai phân lùi cấp  $s$  từ  $x_{k+s}$

$$\Delta^s y_k = \Delta^{s-1} y_{k+1} - \Delta^{s-1} y_k = \nabla^{s-1} y_{k+s} - \nabla^{s-1} y_{k+s-1} = \nabla^s y_{k+s} \quad (16)$$

### Liên hệ giữa sai phân và tỷ sai phân

- Sai phân và tỷ sai phân cấp 1

$$f[x_k, x_k + 1] = \frac{\Delta y_k}{h} = \frac{\nabla y_{k+1}}{h} \quad (17)$$

- Sai phân và tỷ sai phân cấp  $s$

$$f[x_k, \dots, x_{k+s}] = \frac{\Delta^s y_k}{s!h^s} = \frac{\nabla^s y_{k+s}}{s!h^s} \quad (18)$$

### Công thức nội suy Newton tiến mốc cách đều

$$\begin{aligned} P(x_0 + th) = & y_0 + \Delta y_0 t + \frac{\Delta^2 y_0}{2!} t(t-1) + \frac{\Delta^3 y_0}{3!} t(t-1)(t-2) \\ & + \dots + \frac{\Delta^n y_0}{n!} t(t-1) \dots (t-n+1). \end{aligned} \quad (19)$$



**Ví dụ 3.** Cho hàm  $y = f(x)$  thỏa mãn bảng dữ liệu sau.

$k$	0	1	2	3	4	5
$x_k$	1.2	1.4	1.6	1.8	2	2.2
$y_k$	2.6158	3.1604	4.0245	5.2754	6.9804	9.2062

1. Xây dựng đa thức nội suy Newton tiến mốc cách đều xuất phát từ  $x_0 = 1.2$ .
2. Tính gần đúng  $y(1.7)$  và  $y'(1.7)$ .

### Lời giải ví dụ 3.

Các mốc nội suy cách đều với bước  $h = 0.2$ .

Lập bảng sai phân:

$x_k$	$y_k$	SP1	SP2	SP3	SP4	SP5
1.2	2.6158					
1.4	3.1604	0.5446				
1.6	4.0245	0.8641	0.3195			
1.8	5.2754	1.2509	0.3868	0.0673		
2	6.9804	1.705	0.4541	0.0673	0	
2.2	9.2062	2.2258	0.5208	0.0667	-0.0006	-0.0006

### Lời giải ví dụ 3.

Lập bảng tính tích:

	0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	1	0
1	0	0	0	1	-1	0
2	0	0	1	-3	2	0
3	0	1	-6	11	-6	0
4	1	-10	35	-50	24	0

### Lời giải ví dụ 3.

Đa thức nội suy Newton tiến mốc bất kỳ theo biến  $t = 5x - 6$ .

$$\begin{aligned} P(t) &= y_0 + \Delta y_0 t + \frac{\Delta^2 y_0}{2!} t(t-1) + \frac{\Delta^3 y_0}{3!} t(t-1)(t-2) \\ &\quad + \frac{\Delta^4 y_0}{4!} t(t-1)(t-2)(t-3) + \frac{\Delta^5 y_0}{5!} t(t-1)(t-2)(t-3)(t-4) \\ &= 2.6158 + 0.5446t + \frac{0.3195}{2!} t(t-1) + \frac{0.0673}{3!} t(t-1)(t-2) \\ &\quad + \frac{0}{4!} t(t-1)(t-2)(t-3) + \frac{-0.0006}{5!} t(t-1)(t-2)(t-3)(t-4) \\ &= -5 \times 10^{-6} t^5 + 5 \times 10^{-5} t^4 + 0.011041667 t^3 + 0.12635 t^2 \\ &\quad + 0.407163333 t + 2.6158 \end{aligned}$$

### Lời giải ví dụ 3.

Tính giá trị  $y$  và  $y'$  tại  $x = 1.7$  tương ứng với  $t = 2.5$ :

$$y(1.7) \approx P(2.5) = 4.597386719$$

và

$$y'(1.7) \approx \frac{P'(2.5)}{h} = 6.240465104.$$

### Công thức nội suy Newton lùi mốc cách đều

$$\begin{aligned} P(x_n + th) = & y_n + \nabla y_n t + \frac{\nabla^2 y_n}{2!} t(t+1) + \frac{\nabla^3 y_n}{3!} t(t+1)(t+2) \\ & + \dots + \frac{\nabla^n y_n}{n!} t(t+1) \dots (t+n-1). \end{aligned} \quad (20)$$

- 1 Nội dung, mục tiêu
- 2 Bài toán nội suy
- 3 Sơ đồ Horner và ứng dụng
- 4 Đa thức nội suy Lagrange
- 5 Đa thức nội suy Newton
- 6 Phương pháp bình phương tối thiểu**

### Phát biểu bài toán

Cho hệ hàm độc lập tuyến tính trong không gian các hàm liên tục:

$$\{\varphi_j(x), j = \overline{1, m}\} \subset C[a, b].$$

Tìm hàm thực nghiệm dạng  $y = a_1\varphi_1(x) + a_2\varphi_2(x) + \cdots + a_m\varphi_m(x)$  với tập dữ liệu  $S = \{(x_i, y_i), i = \overline{1, n}\}$  sao cho sai số trung bình phương là nhỏ nhất, tức là:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (a_1\varphi_1(x_i) + a_2\varphi_2(x_i) + \cdots + a_m\varphi_m(x_i) - y_i)^2} \longrightarrow \min \quad (21)$$



### Bài toán cực trị

Tìm  $(a_1, \dots, a_m)$  sao cho hàm tổng  $S$  dưới đây đạt giá trị nhỏ nhất.

$$S(a_1, \dots, a_m) = n\sigma^2 = \sum_{i=1}^n (a_1\varphi_1(x_i) + a_2\varphi_2(x_i) + \dots + a_m\varphi_m(x_i) - y_i)^2 \quad (22)$$

$S$  là hàm đa thức bậc hai đối với các biến  $a_j$  với các hệ số của các  $a_j^2$  dương. Do đó,  $S$  có cực tiểu toàn cục đạt tại điểm dừng duy nhất, tức là:

$$\frac{\partial S}{\partial a_j} = \sum_{i=1}^n [2(a_1\varphi_1(x_i) + a_2\varphi_2(x_i) + \cdots + a_m\varphi_m(x_i) - y_i)\varphi_j(x_i)] = 0$$

Do đó, ta có hệ phương trình cho phép xác định các hệ số  $(a_1, \dots, a_m)$

$$a_1 \sum_{i=1}^n \varphi_1(x_i)\varphi_j(x_i) + a_2 \sum_{i=1}^n \varphi_2(x_i)\varphi_j(x_i) + \cdots + a_m \sum_{i=1}^n \varphi_m(x_i)\varphi_j(x_i) = \sum_{i=1}^n y_i\varphi_j(x_i) \quad (23)$$

### Bài toán hình chiếu

Đặt  $g_h = (g(x_1), g(x_2), \dots, g(x_n))^T$  là vector sinh từ hàm liên tục  $g \in C[a, b]$  bất kỳ,  $V = \text{span} \{\varphi_{1h}, \varphi_{2h}, \dots, \varphi_{mh}\}$ . Xác định  $y_h \in V$  sao cho  $S = n\sigma^2 = \|y_h - f_h\|$  nhỏ nhất

$\|y_h - f_h\| \longrightarrow \min$  tức là  $y_h = \text{pro}_V f_h \Leftrightarrow \langle y_h - f_h, \varphi_{jh} \rangle = 0$ .

Do đó, ta có hệ phương trình cho phép xác định vector hệ số  $a = (a_1, \dots, a_m)^T$

$$a_1 \langle \varphi_{1h}, \varphi_{jh} \rangle + a_2 \langle \varphi_{2h}, \varphi_{jh} \rangle + \dots + a_m \langle \varphi_{mh}, \varphi_{jh} \rangle = \langle f_h, \varphi_{jh} \rangle, \quad j = \overline{1, m}. \quad (24)$$

Hệ phương trình (24) có thể viết lại dưới dạng ma trận:

$$\Phi_h^T \Phi_h a = \Phi_h^T f_h, \quad (25)$$

trong đó  $\Phi_h$  là ma trận (cột) của hệ vector  $\varphi_{ih}$ ,  $i = \overline{1, m}$ .

### Ví dụ 4.

Tìm hàm thực nghiệm dạng  $y = ax^3 + b \cos x$  biết bảng dữ liệu

$x_k$	1.1	1.3	1.5	1.7	1.9
$y_k$	1.7768	1.7539	1.8608	2.1408	2.6374
$x_k$	2.1	2.3	2.5	2.7	2.9
$y_k$	3.3936	4.4511	5.8497	7.6265	9.8157

**Lời giải ví dụ 4.** Thiết lập tổng bình phương sai lệch:

$$S = \sum_{k=1}^{10} (ax_k^3 + b \cos x_k - y_k)^2$$

Đặt

$$\varphi_1 = (x_1^3, x_2^3, \dots, x_{10}^3)^T,$$

$$\varphi_2 = (\cos x_1, \cos x_2, \dots, \cos x_{10})^T,$$

$$y = (y_1, y_2, \dots, y_{10})^T,$$

$$g = a\varphi_1 + b\varphi_2.$$

### Lời giải ví dụ 4.

Khi đó,  $S = \|g - y\|^2$ . Do đó,  $S$  nhỏ nhất khi và chỉ khi  $g$  là hình chiếu của  $y$  trong không gian  $V = \text{span}\{\varphi_1, \varphi_2\}$ .

$$g = \text{proj}_V y \iff g \perp V$$

### Lời giải ví dụ 4.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle + b \langle \varphi_2, \varphi_1 \rangle &= \langle y, \varphi_1 \rangle \\ a \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle + b \langle \varphi_2, \varphi_2 \rangle &= \langle y, \varphi_2 \rangle \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \sum_{k=1}^{10} x_k^6 + b \sum_{k=1}^{10} x_k^3 \cos x_k &= \sum_{k=1}^{10} x_k^3 y_k \\ a \sum_{k=1}^{10} x_k^3 \cos x_k + b \sum_{k=1}^{10} \cos^2 x_k &= \sum_{k=1}^{10} y_k \cos x_k \end{cases}$$



**Lời giải ví dụ 4.**

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1549.35889 & -68.1956665 \\ -68.1956665 & 3.504156479 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 607.5998487 \\ -25.51262763 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.500000988 \\ 2.450025585 \end{bmatrix}.$$

Vậy hàm cần tìm là  $y = 0.5x^3 + 2.45 \cos x$ .

### Chú ý.

Có thể sử dụng các phép đổi biến hàm, biến số để đưa dạng hàm cần tìm về dạng hàm tuyến tính theo tham số để sử dụng phương pháp.

### Ví dụ 5.

Dạng hàm  $y = ae^{bx} + 3$  không tuyến tính theo tham số  $b$ .

Nhận xét:  $y - 3 = ae^{bx}$  có dấu trùng với dấu của  $a$ .

Nếu  $y_k > 3$  với mọi  $k$  thì  $y - 3 > 0$  và  $a > 0$ .

Nếu trái lại,  $y_k < 3$  với mọi  $k$  thì  $y - 3 < 0$  và  $a < 0$ .

## 4.5 Phương pháp bình phương tối thiểu



Lấy logarit 2 vế, ta có

$$\ln |y - 3| = \ln |a| + bx.$$

Đổi biến hàm:

$$Y(x) = y(x) - 3 \text{ hoặc } Y(x) = 3 - y(x) \text{ để } Y(x) > 0.$$

Đổi tham số:

$$A = \ln(\pm a).$$

Sau đó, áp dụng phương pháp bình phương tối thiểu cho dạng hàm  $Y = A + bx$  tuyến tính theo 2 tham số  $A, b$ .