

CHƯƠNG 5

TÍNH GẦN ĐÚNG ĐẠO HÀM VÀ TÍCH PHÂN

Nhóm phương pháp tính ⁽¹⁾

KHOA TOÁN - TIN
ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI

01/2024

⁽¹⁾Email: yen.hathingoc@hust.edu.vn

- 1 Nội dung, mục tiêu
- 2 Tính gần đúng đạo hàm
- 3 Công thức hình thang
- 4 Công thức Simpson

Nội dung Chương 5

5.1 Các công thức tính gần đúng đạo hàm

5.2 Công thức hình thang tính gần đúng tích phân xác định

5.3 Công thức Simpson tính gần đúng tích phân xác định

Mục tiêu chương 5

- 1 Tính được đạo hàm qua bảng giá trị rời rạc
- 2 Tính được tích phân xác định và đánh giá được sai số bằng công thức hình thang và công thức Simpson
- 3 Viết được thuật toán và sơ đồ khối cho các công thức tính

- 1 Nội dung, mục tiêu
- 2 Tính gần đúng đạo hàm**
- 3 Công thức hình thang
- 4 Công thức Simpson

Công thức 2 điểm

Với 2 điểm nội suy (x_k, y_k) , (x_{k+1}, y_{k+1}) , đạo hàm bậc nhất của hàm số $y = f(x)$ tại 2 mốc nội suy tương ứng có thể được tính theo công thức:

$$f'(x_k) \approx \frac{y_{k+1} - y_k}{h} \approx f'(x_{k-1}) \quad (1)$$

Công thức 3 điểm

Với 3 điểm nội suy (x_k, y_k) , (x_{k+1}, y_{k+1}) , (x_{k+2}, y_{k+2}) , đạo hàm bậc nhất của hàm số $y = f(x)$ tại 3 mốc nội suy tương ứng có thể được tính theo công thức:

- Công thức cận trái

$$f'(x_k) \approx \frac{-3y_k + 4y_{k+1} - y_{k+2}}{2h} \quad (2)$$

- Công thức trung tâm

$$f'(x_{k+1}) \approx \frac{-y_k + y_{k+2}}{2h} \quad (3)$$

Công thức 3 điểm

Với 3 điểm nội suy (x_k, y_k) , (x_{k+1}, y_{k+1}) , (x_{k+2}, y_{k+2}) , đạo hàm bậc nhất của hàm số $y = f(x)$ tại 3 mốc nội suy tương ứng có thể được tính theo công thức:

- Công thức cận phải

$$f'(x_{k+2}) \approx \frac{y_k - 4y_{k+1} + 3y_{k+2}}{2h} \quad (4)$$

Ví dụ 1.

Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn bảng dữ liệu dưới đây. Dùng các công thức 3 điểm tính gần đúng đạo hàm tại các mốc nội suy.

i	0	1	2	3	4	5
x_i	1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5
y_i	0.41	1.38625	2.5296	3.85295	5.3692	7.09125

Lời giải.

Tại x_0 , ta có

$$y'(x_0) \approx \frac{-3y_0 + 4y_1 - y_2}{2h} = 8.927.$$

Tại x_1 , ta có

$$y'(x_1) \approx \frac{-y_0 + y_2}{2h} = 10.598.$$

Tại x_5 , ta có

$$y'(x_5) \approx \frac{y_3 - 4y_4 + 3y_5}{2h} = 18.2495.$$

Tại các mốc x_2, x_3, x_4 sử dụng công thức trung tâm tương tự mốc x_1 (sinh viên hoàn thành).

- 1 Nội dung, mục tiêu
- 2 Tính gần đúng đạo hàm
- 3 Công thức hình thang**
- 4 Công thức Simpson

Công thức hình thang

Chia $[a, b]$ thành n đoạn lấy tích phân bằng nhau

$$[a, b] = \cup_{i=0}^{n-1} [x_i, x_{i+1}], \quad x_i = a + ih, \quad i = \overline{0, n-1}.$$

Trên mỗi đoạn $[x_i, x_{i+1}]$ xấp xỉ hàm $f(x) \approx P_{1,i}(x)$ qua hai mốc nội suy x_i, x_{i+1} .

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx \approx \int_{x_i}^{x_{i+1}} P_{1,i}(x) dx = \frac{h}{2} (y_i + y_{i+1}) = I_{ih} \quad (5)$$

Công thức hình thang

Do đó, ta có công thức hình thang áp dụng trên toàn đoạn lấy tích phân $[a, b]$:

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx I_h = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h}{2} (y_i + y_{i+1}) = \frac{h}{2} \left(y_0 + y_n + 2 \sum_{i=1}^{n-1} y_i \right) \quad (6)$$

Công thức sai số

- Sai số trên đoạn nhỏ

$$|I_i - I_{ih}| \leq \frac{M_2}{12} h^3 \quad (7)$$

- Sai số trên toàn đoạn lấy tích phân

$$|I - I_h| \leq \frac{M_2}{12} (b - a) h^2 = \frac{M_2 (b - a)^3}{12n^2} \quad (8)$$

Ví dụ 2. Tính gần đúng $I = \int_0^1 e^{x^2} dx$ bằng phương pháp hình thang với số đoạn chia là 10 và đánh giá sai số.

Lời giải. Với số đoạn chia là 10, ta có bước lưới $h = \frac{b-a}{n} = 0.1$.

Áp dụng công thức hình thang (6), ta có:

$$\begin{aligned} I_h &= \frac{h}{2} \left(y_0 + y_{10} + 2 \sum_{i=1}^9 y_i \right) \\ &= \frac{0.1}{2} (1 + 2.718281828 + 2 \times 12.81260601) = 1.467174693 \end{aligned}$$

Sử dụng công thức sai số cho phương pháp hình thang (8) để đánh giá sai số cho I_h , ta có:

$$|I - I_h| \leq \frac{M_2}{12}(b - a)h^2 = 0.013591409,$$

trong đó, $M_2 = \max_{[0,1]} |f''(x)| = 16.30969097$, $a = 0$, $b = 1$, $h = 0.1$.

- 1 Nội dung, mục tiêu
- 2 Tính gần đúng đạo hàm
- 3 Công thức hình thang
- 4 Công thức Simpson**

Công thức Simpson

Chia $[a, b]$ thành n đoạn lấy tích phân bằng nhau

$$[a, b] = \cup_{i=0}^{n-1} [x_{2i}, x_{2i+2}], \quad i = \overline{0, n-1}, \quad x_k = a + kh, \quad k = \overline{0, 2n}.$$

Trên mỗi đoạn $[x_{2i}, x_{2i+2}]$ xấp xỉ hàm $f(x) \approx P_{2,i}(x)$ qua hai mốc nội suy $x_{2i}, x_{2i+1}, x_{2i+2}$.

$$\int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} f(x) dx \approx \int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} P_{2,i}(x) dx = \frac{h}{3} (y_{2i} + 4y_{2i+1} + y_{2i+2}) = I_{ih} \quad (9)$$

Công thức Simpson

Do đó, ta có công thức hình thang áp dụng trên toàn đoạn lấy tích phân $[a, b]$:

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx I_h = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h}{3} (y_i + 4y_{2i+1} + y_{2i+2}) = \frac{h}{3} \left(y_0 + y_{2n} + 4 \sum_{i=0}^{n-1} y_{2i+1} + 2 \sum_{i=1}^n y_{2i} \right) \quad (10)$$

Công thức sai số

- Sai số trên đoạn nhỏ

$$|I_i - I_{ih}| \leq \frac{M_4}{90} h^5 \quad (11)$$

- Sai số trên toàn đoạn lấy tích phân

$$|I - I_h| \leq \frac{M_4}{180} (b - a) h^4 = \frac{M_4 (b - a)^5}{180 m^4}, \quad m = 2n. \quad (12)$$

5.2 Công thức Simpson

Ví dụ 3. Tính gần đúng $I = \int_0^1 e^{x^2} dx$ bằng phương pháp Simpson với số đoạn chia là 10 và đánh giá sai số.

Lời giải. Với số đoạn chia là 10, ta có bước lưới $h = \frac{b-a}{n} = 0.1$. Áp dụng công thức Simpson (10), ta có:

$$\begin{aligned} I_h &= \frac{h}{3} \left(y_0 + y_{10} + 4 \sum_{i=0}^4 y_{2i+1} + 2 \sum_{i=1}^4 y_{2i} \right) \\ &= \frac{0.1}{3} (1 + 2.718281828 + 4 \times 7.268474074 + 2 \times 6.258423907) \\ &= 1.510300865. \end{aligned}$$

Sử dụng công thức sai số cho phương pháp Simpson (12) để đánh giá sai số cho I_h , ta có:

$$|I - I_h| \leq \frac{M_4}{180}(b - a)h^4 = 0.000114772$$

trong đó, $M_4 = \max_{[0,1]} |f^{(4)}(x)| = 206.589419$, $a = 0$, $b = 1$, $h = 0.1$.