Chương 2: PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

BỘ MÔN TOÁN CƠ BẢN

VIỆN TOÁN ỨNG DỤNG VÀ TIN HỌC

ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI

SAMI (HUST) – version 2023

Chương 2: PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

1. Bài 1: MỞ ĐẦU
2. Bài 2: PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP 1
3. Bài 3: PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP 2
4. Bài 4: HỆ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

Bài 1: MỞ ĐẦU

Bài 1: Mở đầu

- Phương trình vi phân (PTVP) là phương trình có dạng

$$F(x, y, y', y'', \cdots, y^{(n)}) = 0,$$

  trong đó x là biến số độc lập, $y = y(x)$ là hàm số phải tìm và $y', y'', \cdots, y^{(n)}$ là các đạo hàm của nó.
- Cấp của phương trình vi phân là cấp cao nhất của đạo hàm của y có mặt trong phương trình.
- Nghiệm của phương trình vi phân là các hàm số y thỏa mãn phương trình trên.
- Giải phương trình vi phân là tìm tất cả các nghiệm của nó.
- Phương trình vi phân tuyến tính là phương trình có dạng

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = b(x),$$

  trong đó $a_1(x), a_2(x), \cdots, a_n(x)$ và $b(x)$ là các hàm số cho trước.

- Phương trình vi phân (PTVP) là phương trình có dạng

$$F(x, y, y', y'', \cdots, y^{(n)}) = 0,$$

trong đó x là biến số độc lập, $y = y(x)$ là hàm số phải tìm và $y', y'', \cdots, y^{(n)}$ là các đạo hàm của nó.

- Cấp của phương trình vi phân là cấp cao nhất của đạo hàm của y có mặt trong phương trình.
- Nghiệm của phương trình vi phân là các hàm số y thỏa mãn phương trình trên.
- Giải phương trình vi phân là tìm tất cả các nghiệm của nó.
- Phương trình vi phân tuyến tính là phương trình có dạng

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = b(x),$$

trong đó $a_1(x), a_2(x), \cdots, a_n(x)$ và $b(x)$ là các hàm số cho trước.

Ví dụ: Giải các PTVP sau:

$a)\, y' - \sin x = 0 \quad (y = -\cos x + C) \quad b)\, y'' - xe^x = 0 \quad (y = xe^x - 2e^x + C_1 x + C_2).$

Bài 2: PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP 1

I. Đại cương về PTVP cấp 1

1. **Định nghĩa:** PTVP cấp 1 là phương trình có dạng $F(x, y, y') = 0$ hoặc $y' = f(x, y)$.

I. Đại cương về PTVP cấp 1

1. **Định nghĩa:** PTVP cấp 1 là phương trình có dạng $F(x, y, y') = 0$ hoặc $y' = f(x, y)$.

2. **Bài toán Cauchy:** là PTVP cấp 1 có dạng $y' = f(x, y)$ thỏa mãn $y(x_0) = y_0$.
   Điều kiện $y(x_0) = y_0$ được gọi là điều kiện Cauchy hay điều kiện ban đầu của bài toán.
   Ví dụ: $y' = x + \cos 2x$ với $y(\pi) = 1$.

I. Đại cương về PTVP cấp 1

1. **Định nghĩa:** PTVP cấp 1 là phương trình có dạng $F(x, y, y') = 0$ hoặc $y' = f(x, y)$.

2. **Bài toán Cauchy:** là PTVP cấp 1 có dạng $y' = f(x, y)$ thỏa mãn $y(x_0) = y_0$.
   Điều kiện $y(x_0) = y_0$ được gọi là điều kiện Cauchy hay điều kiện ban đầu của bài toán.
   Ví dụ: $y' = x + \cos 2x$ với $y(\pi) = 1$.

3. **Định lý về sự tồn tại và duy nhất nghiệm:** Cho PTVP cấp 1 sau: $y' = f(x, y)$. Nếu các giả thiết sau thỏa mãn:
   - $f(x, y)$ liên tục trên miền $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$.
   - $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}$.

   Khi đó: Trong một lân cận nào đó của x_0, tồn tại ít nhất một nghiệm $y = y(x)$ của phương trình trên sao cho $y_0 = y(x_0)$. Hơn nữa, nếu $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ tồn tại và liên tục trên $\mathcal{D}$, thì nghiệm đó là duy nhất.

Chú ý:

- Nếu $f(x, y)$ không liên tục trên $\mathcal{D}$, thì bài toán có thể vô nghiệm. **Ví dụ:** $xy' = y$ với $y(0) = 1$.
- Nếu $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ không liên tục trên $\mathcal{D}$, thì nghiệm có thể không duy nhất. **Ví dụ:** $y' = 2\sqrt{y}$ với $y(0) = 0$.

Chú ý:

- Nếu $f(x,y)$ không liên tục trên $\mathcal{D}$, thì bài toán có thể vô nghiệm. **Ví dụ:** $xy' = y$ với $y(0) = 1$.
- Nếu $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ không liên tục trên $\mathcal{D}$, thì nghiệm có thể không duy nhất. **Ví dụ:** $y' = 2\sqrt{y}$ với $y(0) = 0$.

4. **Các cách gọi nghiệm của bài toán:** Cho PTVP cấp 1 sau: $y' = f(x,y)$. Khi đó:

- Nghiệm tổng quát (TQ) là hàm số có dạng $y = g(x,C)$, trong đó C là một hằng số bất kì, thỏa mãn:
  - i) $y = g(x,C)$ thỏa mãn phương trình với mọi C.
  - ii) Với mọi $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}$, tồn tại duy nhất hằng số $C = C_0$ sao cho $g(x_0, C_0) = y_0$.

  Ví dụ: Nghiệm TQ của PT $y' = x + \cos 2x$ là $y = \displaystyle\int (x + \cos 2x)dx = \frac{x^2}{2} + \frac{\sin 2x}{2} + C$.
- Nghiệm riêng là hàm số có dạng $y = g(x, C_0)$, trong đó $y = g(x,C)$ là nghiệm TQ.

  Ví dụ: Với $C = -2$, nghiệm riêng là $y = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{\sin 2x}{2} - 2$.
- Nghiệm kì dị là nghiệm không nằm trong họ nghiệm TQ.

5. **Chú ý:** Cách viết nghiệm trên được gọi là dạng tường minh. Ngoài ra, nghiệm TQ còn được viết dưới dạng sau:
   - Dạng ẩn (Tích phân TQ): $\phi(x, y, C) = 0$.

     Ví dụ: Nghiệm TQ là $\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{\sin 2x}{2} - y + C = 0$.
   - Dạng tham số: $\begin{cases} x = f(t, C), \\ y = g(t, C). \end{cases}$

5. **Chú ý:** Cách viết nghiệm trên được gọi là dạng tường minh. Ngoài ra, nghiệm TQ còn được viết dưới dạng sau:
   - Dạng ẩn (Tích phân TQ): $\phi(x, y, C) = 0$.

     Ví dụ: Nghiệm TQ là $\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{\sin 2x}{2} - y + C = 0$.
   - Dạng tham số: $\begin{cases} x = f(t, C), \\ y = g(t, C). \end{cases}$

     Ví dụ: Giải phương trình $2y'^2 + 3y' - x = 0$.
     Đặt $y' = t$, PT $\Rightarrow x = 2t^2 + 3t = f(t)$. Ta có:

$$dy = y'dx = t(4t+3)dt \Rightarrow y'_t = 4t^2 + 3t$$
$$\Rightarrow y = \int (4t^2 + 3t)dt = \frac{4}{3}t^3 + \frac{3}{2}t^2 + C = g(t).$$

     KL: Nghiệm TQ của PT là $\begin{cases} x = 2t^2 + 3t, \\ y = \dfrac{4}{3}t^3 + \dfrac{3}{2}t^2 + C. \end{cases}$

II. Các phương trình khuyết

1. PT khuyết y: $F(x, y') = 0$

- Nếu tìm được $y' = f(x)$, thì $y = \int f(x)dx$.
- Nếu tìm được $x = f(y')$, thì đặt $y' = t$ ta có $\begin{cases} x = f(t) \\ y = \int tf'(t)dt. \end{cases}$

Thật vậy: $dy = y'dx = td\big(f(t)\big) = tf'(t)dt \Rightarrow y'_t = tf'(t) \Rightarrow y = \int tf'(t)dt.$

Bài 2: Phương trình vi phân cấp 1

II. Các phương trình khuyết

1. PT khuyết y: $F(x, y') = 0$

- Nếu tìm được $y' = f(x)$, thì $y = \int f(x)dx$.
- Nếu tìm được $x = f(y')$, thì đặt $y' = t$ ta có $\begin{cases} x = f(t) \\ y = \int tf'(t)dt. \end{cases}$

Thật vậy: $dy = y'dx = td\big(f(t)\big) = tf'(t)dt \Rightarrow y'_t = tf'(t) \Rightarrow y = \int tf'(t)dt.$

Ví dụ: Giải PTVP cấp 1 sau: $y'^2 - y' - x + 2 = 0.$

Giải: Đặt $t = y'$, ta có $x = t^2 - t + 2$. Khi đó:

$$dy = y'dx = t(2t-1)dt = (2t^2 - t)dt \Rightarrow y = \int (2t^2 - t)dt = \frac{2}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + C.$$

KL: Nghiệm TQ của PT là $\begin{cases} x = t^2 - t + 2, \\ y = \frac{2}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + C. \end{cases}$

2. PT khuyết x: $F(y, y') = 0$

- Nếu tìm được $y' = f(y)$ tức là $\dfrac{dy}{dx} = f(y)$, thì $x = \displaystyle\int \frac{1}{f(y)} dy$.

  Thật vậy: $x' = \dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{f(y)} \Rightarrow x = \displaystyle\int \frac{1}{f(y)} dy$.

2. PT khuyết x: $F(y, y') = 0$

- Nếu tìm được $y' = f(y)$ tức là $\dfrac{dy}{dx} = f(y)$, thì $x = \displaystyle\int \frac{1}{f(y)} dy$.

  Thật vậy: $x' = \dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{f(y)} \Rightarrow x = \displaystyle\int \frac{1}{f(y)} dy$.

- Nếu tìm được $y = f(y')$, thì đặt $y' = t$ ta có $\begin{cases} x = \displaystyle\int \frac{f'(t)}{t} dt \\ y = f(t). \end{cases}$

  Thật vậy: $dy = y'dx \Rightarrow dx = \dfrac{1}{y'} dy = \dfrac{1}{t} d\big(f(t)\big) = \dfrac{f'(t)}{t} dt$.

2. PT khuyết x: $F(y, y') = 0$

- Nếu tìm được $y' = f(y)$ tức là $\dfrac{dy}{dx} = f(y)$, thì $x = \displaystyle\int \frac{1}{f(y)} dy$.

  Thật vậy: $x' = \dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{f(y)} \Rightarrow x = \displaystyle\int \frac{1}{f(y)} dy$.

- Nếu tìm được $y = f(y')$, thì đặt $y' = t$ ta có $\begin{cases} x = \displaystyle\int \frac{f'(t)}{t} dt \\ y = f(t). \end{cases}$

  Thật vậy: $dy = y'dx \Rightarrow dx = \dfrac{1}{y'} dy = \dfrac{1}{t} d\big(f(t)\big) = \dfrac{f'(t)}{t} dt$.

- Nếu tìm được dạng tham số $\begin{cases} y = f(t) \\ y' = g(t) \end{cases}$ thì $x = \displaystyle\int \frac{f'(t)}{g(t)} dt$.

  Thật vậy: $dy = y'dx \Rightarrow dx = \dfrac{1}{y'} dy = \dfrac{1}{g(t)} d\big(f(t)\big) = \dfrac{f'(t)}{g(t)} dt$.

Ví dụ: Giải PTVP cấp 1 sau: $y'^2 + y^2 = 4$.

Bài 2: Phương trình vi phân cấp 1

Giải: PT $\Leftrightarrow y' = \pm\sqrt{4-y^2} \Leftrightarrow \dfrac{dy}{dx} = \pm\sqrt{4-y^2}$

$$\Leftrightarrow x' = \frac{dx}{dy} = \pm\frac{1}{\sqrt{4-y^2}} \text{ với } y \neq \pm 2.$$

Khi đó: $x = \pm\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{4-y^2}}dy = \pm\arcsin\frac{y}{2} + C$ (Nghiệm TQ) và $y = \pm 2$ (Nghiệm kì dị).

Ngoài ra, ta có thể giải PT trên bằng cách tham số hóa (đặt $y = 2\sin t$ và $y' = 2\cos t$).

Giải: PT $\Leftrightarrow y' = \pm\sqrt{4-y^2} \Leftrightarrow \dfrac{dy}{dx} = \pm\sqrt{4-y^2}$

$$\Leftrightarrow x' = \frac{dx}{dy} = \pm\frac{1}{\sqrt{4-y^2}} \text{ với } y \neq \pm 2.$$

Khi đó: $x = \pm\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{4-y^2}}dy = \pm\arcsin\frac{y}{2} + C$ (Nghiệm TQ) và $y = \pm 2$ (Nghiệm kì dị).

Ngoài ra, ta có thể giải PT trên bằng cách tham số hóa (đặt $y = 2\sin t$ và $y' = 2\cos t$).

III. Các dạng điển hình của PTVP cấp 1

1. PT phân ly biến số: $f(x)dx = g(y)dy$

- **Cách giải:** Lấy tích phân 2 vế ta có: $\displaystyle\int f(x)dx = \int g(y)dy \Leftrightarrow F(x) = G(y) + C$.
- **Ví dụ:** $a)\ y' = 1 + x + y + xy$ $\quad b)\ \tan y dx - x\ln x dy = 0$
  $c)\ (xy^2 + x)dx + (y - x^2y)dy = 0$ $\quad d)\ y'y = x^2 + 2.$

Giải: PT $\Leftrightarrow y' = \pm\sqrt{4-y^2} \Leftrightarrow \dfrac{dy}{dx} = \pm\sqrt{4-y^2}$

$$\Leftrightarrow x' = \frac{dx}{dy} = \pm\frac{1}{\sqrt{4-y^2}} \text{ với } y \neq \pm 2.$$

Khi đó: $x = \pm\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{4-y^2}}dy = \pm\arcsin\frac{y}{2} + C$ (Nghiệm TQ) và $y = \pm 2$ (Nghiệm kì dị).

Ngoài ra, ta có thể giải PT trên bằng cách tham số hóa (đặt $y = 2\sin t$ và $y' = 2\cos t$).

III. Các dạng điển hình của PTVP cấp 1

1. PT phân ly biến số: $f(x)dx = g(y)dy$

- **Cách giải:** Lấy tích phân 2 vế ta có: $\displaystyle\int f(x)dx = \int g(y)dy \Leftrightarrow F(x) = G(y) + C$.
- **Ví dụ:** $a)\ y' = 1 + x + y + xy$ $\quad b)\ \tan y dx - x\ln x dy = 0$
  $c)\ (xy^2 + x)dx + (y - x^2y)dy = 0$ $\quad d)\ y'y = x^2 + 2.$

Giải: a) PT $\Leftrightarrow \dfrac{dy}{dx} = y' = (1+x)(1+y) \Leftrightarrow \dfrac{dy}{1+y} = (1+x)dx$ với $y \neq -1$. Tích phân 2 vế ta có:

$\ln|y+1| = x + \dfrac{x^2}{2} + C$. Với $y = -1$ cũng là 1 nghiệm của PT.

2. PT đẳng cấp: $y' = F\left(\frac{y}{x}\right)$

- **Cách giải:** Đặt $u = \frac{y}{x} \Rightarrow y = u.x \Rightarrow y' = u'.x + u$. Thay vào PT đã cho ta có:

$$u'.x + u = F(u) \Leftrightarrow x\frac{du}{dx} = F(u) - u. \quad \text{(PT phân ly)}$$

- **Ví dụ:** $a)\ y' = \dfrac{4x^2 + 3y^2}{2xy}$ $\qquad b)\ y' = \dfrac{y}{x} + \dfrac{x}{y} + 1$

  $c)\ (x + 2y)dx - xdy = 0$ $\qquad d)\ xy' = x\sin\dfrac{y}{x} + y.$

2. PT đẳng cấp: $y' = F\left(\frac{y}{x}\right)$

- **Cách giải:** Đặt $u = \frac{y}{x} \Rightarrow y = u.x \Rightarrow y' = u'.x + u$. Thay vào PT đã cho ta có:

$$u'.x + u = F(u) \Leftrightarrow x\frac{du}{dx} = F(u) - u. \quad (\text{PT phân ly})$$

- **Ví dụ:** $a)\ y' = \dfrac{4x^2 + 3y^2}{2xy}$ $\qquad b)\ y' = \dfrac{y}{x} + \dfrac{x}{y} + 1$

  $c)\ (x + 2y)dx - xdy = 0$ $\qquad d)\ xy' = x\sin\dfrac{y}{x} + y.$

Giải: a) PT $\Leftrightarrow y' = 2\frac{x}{y} + \frac{3}{2}\frac{y}{x} = F\left(\frac{y}{x}\right)$. Ta có: $F(u) = \frac{2}{u} + \frac{3}{2}u$. PT phân ly thu được là:

$$x\frac{du}{dx} = \frac{2}{u} + \frac{1}{2}u \Leftrightarrow \frac{2u}{u^2 + 4}du = \frac{dx}{x}.$$

Tích phân 2 vế ta có: $\ln(u^2 + 4) = \ln|x| + \ln|C| \Leftrightarrow u^2 + 4 = Cx$.

Khi đó: $\dfrac{y^2}{x^2} + 4 = Cx \Leftrightarrow y^2 = (Cx - 4)x^2 \Leftrightarrow y^2 - (Cx - 4)x^2 = 0.$

3. PT tuyến tính: $y' + p(x)y = q(x)$

- **Cách giải:**
  - **B1:** Xét PT (thuần nhất) $y' + p(x)y = 0 \quad (1)$.
    Ta thấy: $y = 0$ là 1 nghiệm của PT (1). Với $y \neq 0$, ta có:
    $$\text{PT (1)} \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = -p(x)dx \text{ (PT phân ly)} \Leftrightarrow y = Ce^{-\int p(x)dx}.$$

3. PT tuyến tính: $y' + p(x)y = q(x)$

- **Cách giải:**
  - **B1:** Xét PT (thuần nhất) $y' + p(x)y = 0 \quad (1)$.
    Ta thấy: $y = 0$ là 1 nghiệm của PT (1). Với $y \neq 0$, ta có:
    $$\text{PT (1)} \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = -p(x)dx \text{ (PT phân ly)} \Leftrightarrow y = Ce^{-\int p(x)dx}.$$
  - **B2:** Xét PT (không thuần nhất) $y' + p(x)y = q(x) \quad (2)$.
    Ta coi C là 1 hàm số $C(x)$ để tìm nghiệm của PT (2) có dạng $y = C(x)e^{-\int p(x)dx}$.

    Tính $y' = C'(x)e^{-\int p(x)dx} - C(x)e^{-\int p(x)dx}p(x)$, thay vào PT (2) ta được
    $$C'(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x) \Leftrightarrow C'(x) = q(x)e^{\int p(x)dx}.$$
    $$\Leftrightarrow C(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + K.$$
    KL: Nghiệm TQ của PT đã cho là:
    $$y = Ke^{-\int p(x)dx} + e^{-\int p(x)dx}.\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx.$$

Bài 2: Phương trình vi phân cấp 1

- **Ví dụ:** $a)\ y' - \dfrac{y}{x} = x\cos x \qquad b)\ y' - y = \dfrac{e^x}{x},\ y(1) = e.$

  $c)\ y' = \dfrac{e^x}{x+1} - \dfrac{y}{x+1} \qquad d)\ xy' - \dfrac{y}{x+1} - x = 0,\ y(1) = 0.$

Giải: b) Ta có: $p(x) = -1$ và $q(x) = \dfrac{e^x}{x}$. Áp dụng CT nghiệm TQ ta được

$$y = Ke^{-\int p(x)dx} + e^{-\int p(x)dx}.\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx$$

$$= Ke^x + e^x.\int \frac{e^x}{x}e^{-x}dx = Ke^x + e^x \ln|x|.$$

Theo giả thiết $y(1) = e$ ta có: $e = K.e + e\ln 1 \Rightarrow K = 1.$

KL: Nghiệm của PT là $\quad y = e^x + e^x \ln|x|.$

4. PT Bernoulli: $y' + p(x)y = q(x)y^\alpha$ với $\alpha \neq 0$ và $\alpha \neq 1 \quad (1)$.
   - **Cách giải:** Ta thấy: $y = 0$ là 1 nghiệm của PT(1) nếu $\alpha > 0$ và không là nghiệm của PT (1) nếu $\alpha < 0$. Với $y \neq 0$, chia cả 2 vế cho y^α ta có:

$$y^{-\alpha}y' + p(x)y^{1-\alpha} = q(x) \quad (2).$$

Đặt $u = y^{1-\alpha}$. Tính $u' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y'$, thay vào PT (2) ta được

$$u' + (1-\alpha)p(x)u = (1-\alpha)q(x). \quad \text{(PT tuyến tính)}$$

4. PT Bernoulli: $y' + p(x)y = q(x)y^\alpha$ với $\alpha \neq 0$ và $\alpha \neq 1 \quad (1)$.
   - **Cách giải:** Ta thấy: $y = 0$ là 1 nghiệm của PT(1) nếu $\alpha > 0$ và không là nghiệm của PT (1) nếu $\alpha < 0$. Với $y \neq 0$, chia cả 2 vế cho y^α ta có:

$$y^{-\alpha}y' + p(x)y^{1-\alpha} = q(x) \quad (2).$$

Đặt $u = y^{1-\alpha}$. Tính $u' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y'$, thay vào PT (2) ta được

$$u' + (1-\alpha)p(x)u = (1-\alpha)q(x). \quad \text{(PT tuyến tính)}$$

   - **Chú ý:** PT (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} y' + p(x)y = q(x) & \text{nếu } \alpha = 0, \quad \text{(PT tuyến tính)} \\ y' + \big(p(x) - q(x)\big)y = 0 & \text{nếu } \alpha = 1. \quad \text{(PT phân ly)} \end{cases}$
   - **Ví dụ:** $a)\ \dfrac{dy}{dx} - \dfrac{3}{2x}y = \dfrac{2x}{y} \qquad b)\ y' + \dfrac{xy}{1-x^2} = x\sqrt{y}$

     $c)\ 3dy + (1+3y^3)y\sin x\,dx = 0,\ y(\frac{\pi}{2}) = 1$

     $d)\ xy' + (y - x^3y^4) = 0,\ y(1) = 1.$

Giải: b) PT $\Leftrightarrow y' + \dfrac{x}{1-x^2}y = xy^{\frac{1}{2}}. \quad (1)$

Ta thấy $y = 0$ là 1 nghiệm của PT (1). Với $y \neq 0$, chia 2 vế cho $y^{\frac{1}{2}}$

$$\text{PT (1)} \Leftrightarrow y^{-\frac{1}{2}}y' + \frac{x}{1-x^2}y^{\frac{1}{2}} = x. \quad (2)$$

Đặt $u = y^{\frac{1}{2}} \Rightarrow u' = \frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}y'$. Thay vào PT (2) ta có

$$2u' + \frac{x}{1-x^2}u = x \Leftrightarrow u' + \frac{x}{2(1-x^2)}u = \frac{x}{2}. \quad (3)$$

PT (3) là PT tuyến tính với $p(x) = \dfrac{x}{2(1-x^2)}$ và $q(x) = \dfrac{x}{2}$. Áp dụng CT nghiệm TQ ta có

$$u = Ke^{-\int p(x)dx} + e^{-\int p(x)dx}\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx$$

$$= Ke^{\frac{1}{4}\ln|x^2-1|} + e^{\frac{1}{4}\ln|x^2-1|}\int \frac{x}{2}e^{-\frac{1}{4}\ln|x^2-1|}dx = K\sqrt[4]{|x^2-1|} + \frac{1}{3}(x^2-1).$$

KL: Nghiệm của PT là $\sqrt{y} = K\sqrt[4]{|x^2-1|} + \dfrac{1}{3}(x^2-1)$ và $y = 0$.

5. PTVP toàn phần: $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \quad (1)$

- **Định nghĩa:** PT (1) được gọi là PTVP toàn phần nếu tồn tại hàm $u(x,y)$ thỏa mãn:

$$du(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy \quad (2).$$

5. PTVP toàn phần: $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \quad (1)$

- **Định nghĩa:** PT (1) được gọi là PTVP toàn phần nếu tồn tại hàm $u(x,y)$ thỏa mãn:

$$du(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy \quad (2).$$

- **Cách nhận biết:** Kiểm tra các hàm P, Q cùng các đạo hàm riêng cấp 1 là liên tục và điều kiện

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

5. PTVP toàn phần: $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \quad (1)$

- **Định nghĩa:** PT (1) được gọi là PTVP toàn phần nếu tồn tại hàm $u(x,y)$ thỏa mãn:
$$du(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy \quad (2).$$
- **Cách nhận biết:** Kiểm tra các hàm P, Q cùng các đạo hàm riêng cấp 1 là liên tục và điều kiện
$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$
- **Cách giải:** Tích phân 2 vế của PT (2) ta được
$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(t,y_0)dt + \int_{y_0}^{y} Q(x,t)dt = C,$$
hoặc
$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(t,y)dt + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,t)dt = C,$$
trong đó (x_0, y_0) được chọn là một điểm thuộc miền liên tục của hàm P và Q.
- **Ví dụ:** $a)\ (6xy - y^3)dx + (4y + 3x^2 - 3xy^2)dy = 0$ $\qquad b)\ e^{-y}dx + (1 - xe^{-y})dy = 0$

$c)\ 2x\cos^2 y dx + (2y - x^2 \sin 2y)dy = 0$ $\qquad d)\ xdx + ydy = \dfrac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}.$

Giải: b) Ta có: $P(x,y)=e^{-y}$, $Q(x,y)=1-xe^{-y} \Rightarrow \dfrac{\partial P}{\partial y}=-e^{-y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x} \Rightarrow$ PT đã cho là PTVP toàn phần. Khi đó: Chọn $(x_0,y_0)=(0,0)$, nghiệm TQ của PT là

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \int_0^x P(t,0)dt + \int_0^y Q(x,t)dt = C \\ &\Leftrightarrow \int_0^x 1.dt + \int_0^y (1-xe^{-t})dt = C \\ &\Leftrightarrow x+y+xe^{-y}-x=C \Leftrightarrow y+xe^{-y}-C=0. \end{aligned}$$

6. PTVP với thừa số tích phân:

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \quad (1) \quad \text{với} \quad \frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

- **Cách giải:** Tìm hàm số $h(x,y)$ để PT (1) trên trở thành PTVP toàn phần, tức là:

$$\text{PT (1)} \Leftrightarrow h(x,y)P(x,y)dx + h(x,y)Q(x,y)dy = 0 \quad (2) \quad \text{với} \quad \frac{\partial}{\partial y}(hP) = \frac{\partial}{\partial x}(hQ) \ (*).$$

Khi đó: Hàm số $h(x,y)$ được gọi là thừa số tích phân.

6. PTVP với thừa số tích phân:

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \quad (1) \quad \text{với} \quad \frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

- **Cách giải:** Tìm hàm số $h(x,y)$ để PT (1) trên trở thành PTVP toàn phần, tức là:

$$\text{PT (1)} \Leftrightarrow h(x,y)P(x,y)dx + h(x,y)Q(x,y)dy = 0 \quad (2) \quad \text{với} \quad \frac{\partial}{\partial y}(hP) = \frac{\partial}{\partial x}(hQ) \ (*).$$

  Khi đó: Hàm số $h(x,y)$ được gọi là thừa số tích phân.

- **Cách tìm μ:**
  - Nếu $\dfrac{P'_y - Q'_x}{Q} = f(x)$ thì $h(x) = e^{\int f(x)dx}$, tức là hàm chỉ phụ thuộc vào x.
  - Nếu $\dfrac{P'_y - Q'_x}{P} = g(y)$ thì $h(y) = e^{-\int g(y)dy}$, tức là hàm chỉ phụ thuộc vào y.
  - Trường hợp tổng quát: $h(x,y)$ thỏa mãn $(*)$ tức là $\dfrac{Q}{P'_y - Q'_x}h'_x - \dfrac{P}{P'_y - Q'_x}h'_y = h$.

- **Ví dụ:** $a)\ (x+y^2)dx - 2xydy = 0$

  $b)\ (e^{2x} - y^2)dx + ydy = 0$

  $c)\ 2x\tan y dx + (x^2 - 2\sin y)dy = 0.$

Giải: b) Ta có: $P(x,y) = e^{2x} - y^2$, $Q(x,y) = y \Rightarrow \dfrac{\partial P}{\partial y} = -2y \neq 0 = \dfrac{\partial Q}{\partial x} \Rightarrow$ ta tìm thừa số tích phân như sau:

$$f(x) = \frac{P'_y - Q'_x}{Q} = -2 \Rightarrow h(x) = e^{\int f(x)dx} = e^{-2x}.$$

Nhân 2 vế PT đã cho với $h(x)$ ta có:

$$(1 - e^{-2x}y^2)dx + e^{-2x}ydy = 0 \quad (\text{PTVP toàn phần}) \text{ với } \begin{cases} P^*(x,y) = 1 - e^{-2x}y^2, \\ Q^*(x,y) = e^{-2x}y. \end{cases}$$

Khi đó: Chọn $(x_0, y_0) = (0,0)$, nghiệm TQ của PT là

$$u(x,y) = \int_0^x P^*(t,0)dt + \int_0^y Q^*(x,t)dt = C$$

$$\Leftrightarrow \int_0^x 1.dx + \int_0^y e^{-2x}tdt = C \Leftrightarrow x + \frac{e^{-2x}y^2}{2} = C \Leftrightarrow x + \frac{e^{-2x}y^2}{2} - C = 0.$$

Bài 3: PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP 2

Bài 3: Phương trình vi phân cấp 2

I. Đại cương về PTVP cấp 2

1. **Định nghĩa:** PTVP cấp 2 là phương trình có dạng $F(x, y, y', y'') = 0$ hoặc $y'' = f(x, y, y')$.
2. **Định lý về sự tồn tại và duy nhất nghiệm:** Cho PTVP cấp 2: $y'' = f(x, y, y')$. Nếu các giả thiết sau thỏa mãn:
   - $f(x, y, y')$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y, y')$ và $\dfrac{\partial f}{\partial y'}(x, y, y')$ liên tục trên miền $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^3$.
   - $(x_0, y_0, y'_0) \in \mathcal{D}$.

   Khi đó: Trong một lân cận nào đó của x_0, tồn tại duy nhất một nghiệm $y = y(x)$ của phương trình trên sao cho $y_0 = y(x_0)$ và $y'_0 = y'(x_0)$.

Bài 3: Phương trình vi phân cấp 2

I. Đại cương về PTVP cấp 2

1. **Định nghĩa:** PTVP cấp 2 là phương trình có dạng $F(x, y, y', y'') = 0$ hoặc $y'' = f(x, y, y')$.
2. **Định lý về sự tồn tại và duy nhất nghiệm:** Cho PTVP cấp 2: $y'' = f(x, y, y')$. Nếu các giả thiết sau thỏa mãn:
   - $f(x, y, y')$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y, y')$ và $\dfrac{\partial f}{\partial y'}(x, y, y')$ liên tục trên miền $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^3$.
   - $(x_0, y_0, y'_0) \in \mathcal{D}$.

   Khi đó: Trong một lân cận nào đó của x_0, tồn tại duy nhất một nghiệm $y = y(x)$ của phương trình trên sao cho $y_0 = y(x_0)$ và $y'_0 = y'(x_0)$.
3. **Bài toán Cauchy:** là PTVP cấp 2 có dạng $y'' = f(x, y, y')$ thỏa mãn $y(x_0) = y_0$ và $y'(x_0) = y'_0$.
   Điều kiện $y(x_0) = y_0$ và $y'(x_0) = y'_0$ được gọi là điều kiện Cauchy hay điều kiện ban đầu.

4. **Các cách gọi nghiệm của bài toán:** Cho PTVP cấp 2: $y'' = f(x, y, y')$. Khi đó:

- Nghiệm tổng quát (TQ) là hàm số có dạng $y = g(x, C_1, C_2)$, trong đó C_1, C_2 là các hằng số bất kì, thỏa mãn:
  - i) $y = g(x, C_1, C_2)$ thỏa mãn phương trình với mọi C_1 và C_2.
  - ii) Với mọi $(x_0, y_0, y_0') \in \mathcal{D}$, tồn tại duy nhất hai hằng số $C_1 = C_1^0$ và $C_2 = C_2^0$ sao cho $g(x_0, C_1, C_2) = y_0$ và $g'(x_0, C_1, C_2) = y_0'$.
- Nghiệm riêng là hàm số có dạng $y = g(x, C_1^0, C_2^0)$, trong đó $y = g(x, C_1, C_2)$ là nghiệm TQ.
- Nghiệm kì dị là nghiệm không nằm trong họ nghiệm TQ.

4. **Các cách gọi nghiệm của bài toán:** Cho PTVP cấp 2: $y'' = f(x, y, y')$. Khi đó:
   - Nghiệm tổng quát (TQ) là hàm số có dạng $y = g(x, C_1, C_2)$, trong đó C_1, C_2 là các hằng số bất kì, thỏa mãn:
     i) $y = g(x, C_1, C_2)$ thỏa mãn phương trình với mọi C_1 và C_2.
     ii) Với mọi $(x_0, y_0, y_0') \in \mathcal{D}$, tồn tại duy nhất hai hằng số $C_1 = C_1^0$ và $C_2 = C_2^0$ sao cho $g(x_0, C_1, C_2) = y_0$ và $g'(x_0, C_1, C_2) = y_0'$.
   - Nghiệm riêng là hàm số có dạng $y = g(x, C_1^0, C_2^0)$, trong đó $y = g(x, C_1, C_2)$ là nghiệm TQ.
   - Nghiệm kì dị là nghiệm không nằm trong họ nghiệm TQ.
5. **Chú ý:** Cách viết nghiệm trên được gọi là dạng tường minh. Ngoài ra, nghiệm TQ còn được viết dưới dạng sau:
   - Dạng ẩn (Tích phân TQ): $\phi(x, y, C_1, C_2) = 0$.
   - Dạng tham số: $\begin{cases} x = f(t, C_1, C_2), \\ y = g(t, C_1, C_2). \end{cases}$

II. Các phương trình khuyết

1. PT khuyết y: $F(x, y', y'') = 0$
   - Đặt $u = y'$, ta đưa về PTVP cấp 1: $F(x, u, u') = 0$.
   - Giả sử PT trên có nghiệm TQ: $u = f(x, C)$. Giải PTVP cấp 1: $y' = f(x, C)$.

Ví dụ: $a)\, x = (y'')^2 + y'' + 1$ $\quad b)\, y'' = x + \sin x$ $\quad c)\, y'' = y' + x$

$d)\, 2xy'' - 6y' + x^2 = 0$ với $y(1) = 0,\ y'(1) = 1$.

II. Các phương trình khuyết

1. PT khuyết y: $F(x, y', y'') = 0$

- Đặt $u = y'$, ta đưa về PTVP cấp 1: $F(x, u, u') = 0$.
- Giả sử PT trên có nghiệm TQ: $u = f(x, C)$. Giải PTVP cấp 1: $y' = f(x, C)$.

Ví dụ: $a)\, x = (y'')^2 + y'' + 1$ $\quad b)\, y'' = x + \sin x$ $\quad c)\, y'' = y' + x$

$d)\, 2xy'' - 6y' + x^2 = 0$ với $y(1) = 0$, $y'(1) = 1$.

Giải: d) PT $\Leftrightarrow y'' - \dfrac{3}{x}y' = -\dfrac{x}{2}$. $\quad (1)$

Đặt $u = y'$, ta có: $u' - \dfrac{3}{x}u = -\dfrac{x}{2}$ $\quad$ (2) $\Rightarrow$ Nghiệm TQ của (2) là

$$u = Ke^{-\int p(x)dx} + e^{-\int p(x)dx}.\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx$$

$$= Ke^{3\ln|x|} - e^{3\ln|x|}\int \frac{x}{2}e^{-3\ln|x|}dx = Cx^3 - x^3\int \frac{x}{2}x^{-3}dx \quad (\text{với } C = \pm K)$$

$$= Cx^3 + \frac{1}{2}x^2.$$

Bài 3: Phương trình vi phân cấp 2

Theo giả thiết $y'(1) = 1 \Rightarrow u(1) = 1 \Rightarrow C = \frac{1}{2}$. Ta có:

$$y' = \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^2 \Leftrightarrow y = \int \left(\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right)dx = \frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{6}x^3 + D.$$

Vì đk ban đầu $y(1) = 0$ nên $D = -\frac{7}{24} \Rightarrow$ KL: $y = \frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{7}{24}$.

Theo giả thiết $y'(1) = 1 \Rightarrow u(1) = 1 \Rightarrow C = \frac{1}{2}$. Ta có:

$$y' = \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^2 \Leftrightarrow y = \int \Big(\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^2\Big)dx = \frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{6}x^3 + D.$$

Vì đk ban đầu $y(1) = 0$ nên $D = -\frac{7}{24} \Rightarrow$ KL: $y = \frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{7}{24}$.

2. PT khuyết x: $F(y, y', y'') = 0$
   - Đặt $u = y'$, ta có $y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = u\frac{du}{dy}$.

     Thay vào PT đã cho ta có PTVP cấp 1: $F\Big(y, u, u\frac{du}{dy}\Big) = 0$.
   - Giả sử PT trên có nghiệm TQ: $u = f(y, C)$. Giải PTVP cấp 1: $y' = f(y, C)$.

Ví dụ:

$a)\ 2yy'' = y'^2 + 1$ $\qquad b)\ yy'' = y'^2 - y'^3$

$c)\ y'' + y'^2 = 2e^{-y}$ $\qquad d)\ y'(1 + y'^2) = y''$.

Bài 3: Phương trình vi phân cấp 2

Giải: b) Đặt $u = y'$, ta có $y'' = u\dfrac{du}{dy}$, thay vào PT ta có: $\quad yu\dfrac{du}{dy} = u^2 - u^3. \quad (*)$

Ta thấy: $u = 0$, tức là $y = C_1$ là 1 nghiệm của PT. Với $u \neq 0$, ta có:

$$\text{PT } (*) \Leftrightarrow y\frac{du}{dy} = u - u^2 \Leftrightarrow \frac{du}{u-u^2} = \frac{dy}{y} \text{ với } u \neq 1.$$

Tích phân 2 vế ta có: $-\ln\left|\dfrac{u-1}{u}\right| = \ln|y| + \ln|C_2| \Leftrightarrow \left|\dfrac{u-1}{u}\right| = \dfrac{1}{|C_2 y|}$

$$\Leftrightarrow \frac{u-1}{u} = \frac{C_3}{y} \Rightarrow u = \frac{y}{y - C_3}.$$

Khi đó:

$$y' = \frac{y}{y-C_3} \Leftrightarrow \frac{y-C_3}{y}dy = dx \Leftrightarrow x = \int\left(1 - \frac{C_3}{y}\right)dy = y - C_3\ln|y| + C_4.$$

Ta thấy: $u = 1$, tức là $y = x + C$ cũng là nghiệm của PT.
KL: Nghiệm là $y = C_1$, $y = x + C$ và $x = y - C_3\ln|y| + C_4$.

Bài 3: Phương trình vi phân cấp 2

3. PT khuyết y' (và y): $F(x, y'') = 0$
   Từ PT ta rút ra được $y'' = g(x)$, thì ta chỉ cần lấy tích phân 2 lần sẽ có nghiệm TQ. Nếu từ $F(x, y'') = 0$ ta rút ra được $x = f(y'')$, thì ta sẽ tham số hóa nghiệm như sau:
   - Đặt $t = y''$, ta có $x = f(t)$. Để tìm y', ta có $dy' = y''dx = tf'(t)dt$. Lấy nguyên hàm 2 vế, ta tính được $y' = f_1(t, C_1)$ với C_1 là hằng số.
   - Để tìm y, ta biến đổi $dy = y'dx = f_1(t, C_1)f'(t)dt \Rightarrow y = f_2(t, C_1, C_2)$ với C_2 là hằng số.

   Ví dụ: Giải PTVP sau: $x = (y'')^2 + y'' + 1$.

3. PT khuyết y' (và y): $F(x, y'') = 0$

   Từ PT ta rút ra được $y'' = g(x)$, thì ta chỉ cần lấy tích phân 2 lần sẽ có nghiệm TQ. Nếu từ $F(x, y'') = 0$ ta rút ra được $x = f(y'')$, thì ta sẽ tham số hóa nghiệm như sau:

   - Đặt $t = y''$, ta có $x = f(t)$. Để tìm y', ta có $dy' = y''dx = tf'(t)dt$. Lấy nguyên hàm 2 vế, ta tính được $y' = f_1(t, C_1)$ với C_1 là hằng số.
   - Để tìm y, ta biến đổi $dy = y'dx = f_1(t, C_1)f'(t)dt \Rightarrow y = f_2(t, C_1, C_2)$ với C_2 là hằng số.

Ví dụ: Giải PTVP sau: $x = (y'')^2 + y'' + 1$.

Giải: Đặt $t = y''$, từ PT đã cho ta có $x = t^2 + t + 1$.

Ta thấy: $dy' = y''dx = t(2t+1)dt = (2t^2 + t)dt$. Nguyên hàm 2 vế ta có $y' = \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 + C_1$.

Khi đó: $dy = y'dx = \left(\frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 + C_1\right)(2t+1)dt = \left(\frac{4}{3}t^4 + \frac{5}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 + 2C_1t + C_1\right)dt$

và lấy nguyên hàm 2 vế ta được: $y = \frac{4}{15}t^5 + \frac{5}{12}t^4 + \frac{1}{6}t^3 + C_1t^2 + C_1t + C_2$.

Kết luận: Nghiệm TQ của PT là $\begin{cases} x = t^2 + t + 1, \\ y = \frac{4}{15}t^5 + \frac{5}{12}t^4 + \frac{1}{6}t^3 + C_1t^2 + C_1t + C_2. \end{cases}$

Bài 3: Phương trình vi phân cấp 2

III. PTVP tuyến tính cấp 2 tổng quát: $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$,

trong đó $p(x), q(x)$ và $f(x)$ là các hàm số cho trước.

1. PTVP tuyến tính cấp 2 thuần nhất: $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad (1)$.
   - **Định lý 1:** Nếu y_1 và y_2 là các nghiệm của PT (1), thì $C_1y_1 + C_2y_2$ cũng là nghiệm của PT (1) với mọi $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

III. PTVP tuyến tính cấp 2 tổng quát: $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$,

trong đó $p(x), q(x)$ và $f(x)$ là các hàm số cho trước.

1. PTVP tuyến tính cấp 2 thuần nhất: $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad (1)$.

- **Định lý 1:** Nếu y_1 và y_2 là các nghiệm của PT (1), thì $C_1y_1 + C_2y_2$ cũng là nghiệm của PT (1) với mọi $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

  C/M: Ta có: $y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1 = 0$ và $y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2 = 0$

  $\Rightarrow (C_1y_1 + C_2y_2)'' + p(x)(C_1y_1 + C_2y_2)' + q(x)(C_1y_1 + C_2y_2) = 0$, tức là ta có đpcm.

Bài 3: Phương trình vi phân cấp 2

III. PTVP tuyến tính cấp 2 tổng quát: $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$,

trong đó $p(x), q(x)$ và $f(x)$ là các hàm số cho trước.

1. PTVP tuyến tính cấp 2 thuần nhất: $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad (1)$.

- **Định lý 1:** Nếu y_1 và y_2 là các nghiệm của PT (1), thì $C_1y_1 + C_2y_2$ cũng là nghiệm của PT (1) với mọi $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

  C/M: Ta có: $y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1 = 0$ và $y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2 = 0$

  $\Rightarrow (C_1y_1 + C_2y_2)'' + p(x)(C_1y_1 + C_2y_2)' + q(x)(C_1y_1 + C_2y_2) = 0$, tức là ta có đpcm.

- **Định nghĩa 1:** Hai hàm số $y_1(x)$ và $y_2(x)$ được gọi là độc lập tuyến tính trên $[a, b]$ nếu

$$\frac{y_2(x)}{y_1(x)} \neq \text{ hằng số với } \forall x \in [a, b].$$

  Ngược lại, ta nói hai hàm đó là phụ thuộc tuyến tính.

  Ví dụ: $a)\ e^x,\ e^{2x}$ (ĐLTT) $b)\ x^2 + 2x + 1,\ x + 1$ (ĐLTT) $c)\ \tan x,\ 2\tan x.$ (PTTT)

Bài 3: Phương trình vi phân cấp 2

- **Định nghĩa 2:** Định thức Wronsky của hai hàm $y_1(x)$ và $y_2(x)$ là $W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$.
- **Định lý 2:** Nếu y_1 và y_2 là phụ thuộc tuyến tính trên $[a, b]$ thì $W(y_1, y_2) = 0$ với $\forall x \in [a, b]$.

Bài 3: Phương trình vi phân cấp 2

- **Định nghĩa 2:** Định thức Wronsky của hai hàm $y_1(x)$ và $y_2(x)$ là $W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$.
- **Định lý 2:** Nếu y_1 và y_2 là phụ thuộc tuyến tính trên $[a, b]$ thì $W(y_1, y_2) = 0$ với $\forall x \in [a, b]$.

  C/M: Vì y_1 và y_2 là phụ thuộc tuyến tính nên $\dfrac{y_2(x)}{y_1(x)} = C$ là hằng số.

  $\Rightarrow y_2 = Cy_1 \Rightarrow y_2' = Cy_1' \Rightarrow y_1y_2' = y_1'y_2 \Rightarrow$ đpcm.

Bài 3: Phương trình vi phân cấp 2

- **Định nghĩa 2:** Định thức Wronsky của hai hàm $y_1(x)$ và $y_2(x)$ là $W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$.
- **Định lý 2:** Nếu y_1 và y_2 là phụ thuộc tuyến tính trên $[a, b]$ thì $W(y_1, y_2) = 0$ với $\forall x \in [a, b]$.

  C/M: Vì y_1 và y_2 là phụ thuộc tuyến tính nên $\dfrac{y_2(x)}{y_1(x)} = C$ là hằng số.

  $\Rightarrow y_2 = Cy_1 \Rightarrow y_2' = Cy_1' \Rightarrow y_1 y_2' = y_1' y_2 \Rightarrow$ đpcm.

  Chú ý: Nếu tồn tại $x_0 \in [a, b]$ mà $W(y_1, y_2) \neq 0$ tại $x = x_0$, thì hai hàm đó là độc lập tuyến tính.

- **Định nghĩa 2:** Định thức Wronsky của hai hàm $y_1(x)$ và $y_2(x)$ là $W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$.
- **Định lý 2:** Nếu y_1 và y_2 là phụ thuộc tuyến tính trên $[a, b]$ thì $W(y_1, y_2) = 0$ với $\forall x \in [a, b]$.

  C/M: Vì y_1 và y_2 là phụ thuộc tuyến tính nên $\dfrac{y_2(x)}{y_1(x)} = C$ là hằng số.

  $\Rightarrow y_2 = Cy_1 \Rightarrow y_2' = Cy_1' \Rightarrow y_1y_2' = y_1'y_2 \Rightarrow$ đpcm.

  Chú ý: Nếu tồn tại $x_0 \in [a, b]$ mà $W(y_1, y_2) \neq 0$ tại $x = x_0$, thì hai hàm đó là độc lập tuyến tính.
- **Định lý 3:** Cho $p(x)$ và $q(x)$ liên tục trên $[a, b]$. Nếu y_1 và y_2 là các nghiệm của PT (1) thỏa mãn: $W(y_1, y_2) \neq 0$ tại $x = x_0 \in [a, b]$, thì $W(y_1, y_2) \neq 0$ với $\forall x \in [a, b]$.

- **Định nghĩa 2:** Định thức Wronsky của hai hàm $y_1(x)$ và $y_2(x)$ là $W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$.

- **Định lý 2:** Nếu y_1 và y_2 là phụ thuộc tuyến tính trên $[a, b]$ thì $W(y_1, y_2) = 0$ với $\forall x \in [a, b]$.

  C/M: Vì y_1 và y_2 là phụ thuộc tuyến tính nên $\dfrac{y_2(x)}{y_1(x)} = C$ là hằng số.

  $\Rightarrow y_2 = Cy_1 \Rightarrow y_2' = Cy_1' \Rightarrow y_1y_2' = y_1'y_2 \Rightarrow$ đpcm.

  Chú ý: Nếu tồn tại $x_0 \in [a, b]$ mà $W(y_1, y_2) \neq 0$ tại $x = x_0$, thì hai hàm đó là độc lập tuyến tính.

- **Định lý 3:** Cho $p(x)$ và $q(x)$ liên tục trên $[a, b]$. Nếu y_1 và y_2 là các nghiệm của PT (1) thỏa mãn: $W(y_1, y_2) \neq 0$ tại $x = x_0 \in [a, b]$, thì $W(y_1, y_2) \neq 0$ với $\forall x \in [a, b]$.

  C/M: Ta có: $y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1 = 0$ và $y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2 = 0$

  $\Rightarrow y_1''y_2 + p(x)y_1'y_2 + q(x)y_1y_2 = 0$ và $y_1y_2'' + p(x)y_1y_2' + q(x)y_1y_2 = 0$, tức là

$$(y_1y_2'' - y_1''y_2) + p(x)(y_1y_2' - y_1'y_2) = 0. \qquad (*)$$

  Vì $W = y_1y_2' - y_1'y_2$ nên $W' = y_1'y_2' + y_1y_2'' - y_1''y_2 - y_1'y_2' = y_1y_2'' - y_1''y_2$.

Bài 3: Phương trình vi phân cấp 2

PT (*) trở thành: $\dfrac{dW}{dx} = -p(x)W \Leftrightarrow \dfrac{dW}{W} = -p(x)dx \Leftrightarrow \left|\dfrac{W(x)}{W(x_0)}\right| = e^{-\int_{x_0}^{x} p(x)dx}$ do giả thiết $W(x_0) \neq 0$. Khi đó: $W(x) = \pm W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x} p(x)dx} \neq 0$ với $\forall\, x \in [a,b]$.

Bài 3: Phương trình vi phân cấp 2

PT (*) trở thành: $\dfrac{dW}{dx} = -p(x)W \Leftrightarrow \dfrac{dW}{W} = -p(x)dx \Leftrightarrow \left|\dfrac{W(x)}{W(x_0)}\right| = e^{-\int_{x_0}^{x} p(x)dx}$ do giả thiết $W(x_0) \neq 0$. Khi đó: $W(x) = \pm W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x} p(x)dx} \neq 0$ với $\forall\, x \in [a, b]$.

- **Định lý 4:** Nếu y_1 và y_2 là các nghiệm độc lập tuyến tính của PT (1), thì
  - $W(y_1, y_2) \neq 0$ với $\forall\, x \in [a, b]$.
  - nghiệm TQ của PT (1) có dạng: $y = C_1y_1 + C_2y_2$ với mọi hằng số C_1, C_2.

Bài 3: Phương trình vi phân cấp 2

PT (*) trở thành: $\dfrac{dW}{dx} = -p(x)W \Leftrightarrow \dfrac{dW}{W} = -p(x)dx \Leftrightarrow \left|\dfrac{W(x)}{W(x_0)}\right| = e^{-\int_{x_0}^{x} p(x)dx}$ do giả thiết $W(x_0) \neq 0$. Khi đó: $W(x) = \pm W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x} p(x)dx} \neq 0$ với $\forall x \in [a, b]$.

- **Định lý 4:** Nếu y_1 và y_2 là các nghiệm độc lập tuyến tính của PT (1), thì
  - $W(y_1, y_2) \neq 0$ với $\forall x \in [a, b]$.
  - nghiệm TQ của PT (1) có dạng: $y = C_1y_1 + C_2y_2$ với mọi hằng số C_1, C_2.

Chú ý: Muốn tìm nghiệm TQ của PT (1), ta chỉ cần xác định được hai nghiệm độc lập tuyến tính của nó. Cách tìm như sau:

- **B1:** Nhẩm 1 nghiệm $y_1 \neq 0$ thỏa mãn PT (1).
- **B2:** Xác định nghiệm y_2 bằng cách đặt $y_2 = y_1.u$. Thay vào PT (1) ta tính được

$$u = \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p(x)dx} dx. \quad \text{(CT Liouville)}$$

Ví dụ: $a)\ x^2y'' + xy' - y = 0$ $\quad b)\ (2x + 1)y'' + 4xy' - 4y = 0.$

Bài 3: Phương trình vi phân cấp 2

Giải: a) PT $\Leftrightarrow y'' + \dfrac{1}{x}y' - \dfrac{1}{x^2}y = 0.$

Ta thấy: $y_1 = x$ là nghiệm của PT. Đặt $y_2 = y_1.u = u.x$, theo CT Liouville ta có:

$$u = \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p(x)dx} dx = \int \frac{1}{x^2} e^{-\int \frac{1}{x}dx} dx = \int \frac{1}{x^2|x|} dx = \pm \frac{1}{2x^2}.$$

Khi đó, ta có thể chọn $u = \dfrac{1}{2x^2}$ để có $y_2 = \dfrac{1}{2x}$.

KL: Nghiệm TQ là $y = C_1 x + \dfrac{C_2}{2x}$.

2. PTVP tuyến tính cấp 2 không thuần nhất: $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$. $\qquad (2)$

- **Định lý 1:** Nghiệm TQ của PT (2) luôn có dạng $y = \bar{y} + Y$, trong đó $\bar{y}$ là nghiệm TQ của PT (1) và Y là 1 nghiệm riêng của PT (2).

  Chú ý: Nghiệm $\bar{y}$ đã được xác định ở phần trước, nên để tìm nghiệm TQ của PT (2) ta chỉ cần tìm 1 nghiệm riêng Y của PT (2) là đủ.

2. PTVP tuyến tính cấp 2 không thuần nhất: $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$. (2)

- **Định lý 1:** Nghiệm TQ của PT (2) luôn có dạng $y = \bar{y} + Y$, trong đó $\bar{y}$ là nghiệm TQ của PT (1) và Y là 1 nghiệm riêng của PT (2).

  Chú ý: Nghiệm $\bar{y}$ đã được xác định ở phần trước, nên để tìm nghiệm TQ của PT (2) ta chỉ cần tìm 1 nghiệm riêng Y của PT (2) là đủ.
- **Định lý 2:** (Phương pháp biến thiên hằng số Lagrange)
  - **B1:** Xác định nghiệm TQ của PT (1) có dạng $\bar{y} = C_1y_1 + C_2y_2$.
  - **B2:** Coi C_1 và C_2 là các hàm số để tìm 1 nghiệm riêng Y của PT (2) có dạng

$$Y = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2$$

bằng cách xét HPT sau: $\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0 \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = f(x). \end{cases}$

Giải HPT trên tìm $C_1'(x)$ và $C_2'(x) \Rightarrow C_1(x)$ và $C_2(x)$.

Bài 3: Phương trình vi phân cấp 2

Ví dụ: $a)\; y'' - y' = \dfrac{2-x}{x^3}e^x \qquad b)\; x^2y'' + xy' - y = x^2.$

Giải: b) PT $\Leftrightarrow y'' + \dfrac{1}{x}y' - \dfrac{1}{x^2}y = 1$. Xét PT: $y'' + \dfrac{1}{x}y' - \dfrac{1}{x^2}y = 0 \quad (1)$. Theo ví dụ trước, nghiệm TQ của (1) là $\bar{y} = C_1x + \dfrac{C_2}{x}$, tức là $y_1 = x$ và $y_2 = \dfrac{1}{x}$. Ta tìm 1 nghiệm riêng Y của PT đã cho có dạng $Y = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2$ bằng cách xét HPT sau:

$$\begin{cases} C_1'(x)x + C_2'(x)\dfrac{1}{x} = 0 \\ C_1'(x) - C_2'(x)\dfrac{1}{x^2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1'(x) = \dfrac{1}{2} \\ C_2'(x) = -\dfrac{x^2}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1(x) = \dfrac{x}{2} \\ C_2(x) = -\dfrac{x^3}{6}. \end{cases}$$

KL: $Y = \dfrac{x^2}{3} \Rightarrow$ Nghiệm TQ của PT đã cho là $y = \dfrac{x^2}{3} + C_1x + \dfrac{C_2}{x}$.

Bài 3: Phương trình vi phân cấp 2

Ví dụ: $a)\ y'' - y' = \dfrac{2-x}{x^3}e^x \qquad b)\ x^2y'' + xy' - y = x^2.$

Giải: b) PT $\Leftrightarrow y'' + \dfrac{1}{x}y' - \dfrac{1}{x^2}y = 1$. Xét PT: $y'' + \dfrac{1}{x}y' - \dfrac{1}{x^2}y = 0 \quad (1)$. Theo ví dụ trước, nghiệm TQ của (1) là $\bar{y} = C_1x + \dfrac{C_2}{x}$, tức là $y_1 = x$ và $y_2 = \dfrac{1}{x}$. Ta tìm 1 nghiệm riêng Y của PT đã cho có dạng $Y = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2$ bằng cách xét HPT sau:

$$\begin{cases} C_1'(x)x + C_2'(x)\dfrac{1}{x} = 0 \\ C_1'(x) - C_2'(x)\dfrac{1}{x^2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1'(x) = \dfrac{1}{2} \\ C_2'(x) = -\dfrac{x^2}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1(x) = \dfrac{x}{2} \\ C_2(x) = -\dfrac{x^3}{6}. \end{cases}$$

KL: $Y = \dfrac{x^2}{3} \Rightarrow$ Nghiệm TQ của PT đã cho là $y = \dfrac{x^2}{3} + C_1x + \dfrac{C_2}{x}$.

- **Định lý 3:** (Nguyên lý chồng nghiệm)

  Nếu Y_1 là một nghiệm riêng của PT $y'' + p(x)y' + q(x)y = f_1(x)$,
  Y_2 là một nghiệm riêng của PT $y'' + p(x)y' + q(x)y = f_2(x)$,
  thì $Y_1 + Y_2$ là một nghiệm riêng của PT sau:
  $$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_1(x) + f_2(x).$$

IV. PTVP tuyến tính cấp 2 có hệ số không đổi: $y'' + py' + qy = f(x)$,

trong đó p, q là các hằng số và $f(x)$ là hàm số cho trước.

1. PT thuần nhất: $y'' + py' + qy = 0 \quad (1)$.

Xét PT đặc trưng: $\lambda^2 + p\lambda + q = 0. \qquad (*)$

- **TH1**: Nếu PT $(*)$ có 2 nghiệm thực phân biệt $\lambda_1 \neq \lambda_2$, thì nghiệm TQ của PT (1) là

$$\bar{y} = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}.$$

- **TH2**: Nếu PT $(*)$ có nghiệm kép $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0$, thì nghiệm TQ của PT (1) là

$$\bar{y} = C_1 e^{\lambda_0 x} + C_2 x e^{\lambda_0 x}.$$

- **TH3**: Nếu PT $(*)$ có 2 nghiệm phức $\lambda_{1,2} = a \pm bi$, thì nghiệm TQ của PT (1) là

$$\bar{y} = e^{ax}(C_1 \cos bx + C_2 \sin bx).$$

Ví dụ: $a)\ y'' + 3y' + 2y = 0 \qquad b)\ 4y'' + 4y' + y = 0 \qquad c)\ y'' + y' + 3y = 0.$

Bài 3: Phương trình vi phân cấp 2

Giải: a) Xét PT đặc trưng: $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$. PT có 2 nghiệm phân biệt $\lambda_1 = -1$ và $\lambda_2 = -2$. Nghiệm TQ của PT là

$$\bar{y} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}.$$

b) Xét PT đặc trưng: $4\lambda^2 + 4\lambda + 1 = 0$. PT có nghiệm kép $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{1}{2}$. Nghiệm TQ của PT là

$$\bar{y} = C_1 e^{-\frac{1}{2}x} + C_2 x e^{-\frac{1}{2}x}.$$

c) Xét PT đặc trưng: $\lambda^2 + \lambda + 3 = 0$. PT có 2 nghiệm phức $\lambda_{1,2} = -1 \pm \sqrt{11}i$. Nghiệm TQ của PT là

$$\bar{y} = e^{-x}(C_1 \cos\sqrt{11}x + C_2 \sin\sqrt{11}x).$$

2. PT không thuần nhất: $y'' + py' + qy = f(x) \quad (2)$.

   Cần nhớ: Nghiệm TQ của PT (2) luôn có dạng $y = \bar{y} + Y$, trong đó $\bar{y}$ là nghiệm TQ của PT (1) và Y là 1 nghiệm riêng của PT (2). Nghiệm $\bar{y}$ đã được xác định ở phần trước, nên để tìm nghiệm TQ của PT (2) ta chỉ cần tìm 1 nghiệm riêng Y của PT (2) là đủ.

2. PT không thuần nhất: $y'' + py' + qy = f(x) \quad (2)$.

Cần nhớ: Nghiệm TQ của PT (2) luôn có dạng $y = \bar{y} + Y$, trong đó $\bar{y}$ là nghiệm TQ của PT (1) và Y là 1 nghiệm riêng của PT (2). Nghiệm $\bar{y}$ đã được xác định ở phần trước, nên để tìm nghiệm TQ của PT (2) ta chỉ cần tìm 1 nghiệm riêng Y của PT (2) là đủ.

$2.1.$ $f(x) = e^{\alpha x} P_n(x)$ với $\alpha \in \mathbb{R}$ và $P_n(x)$ là đa thức bậc n.

- **TH1:** Nếu α không là nghiệm của PT $(*)$, thì nghiệm riêng Y của PT (2) có dạng
$$Y = e^{\alpha x} Q_n(x).$$
- **TH2:** Nếu α là nghiệm đơn của PT $(*)$, thì nghiệm riêng Y của PT (2) có dạng
$$Y = x e^{\alpha x} Q_n(x).$$
- **TH3:** Nếu α là nghiệm kép của PT $(*)$, thì nghiệm riêng Y của PT (2) có dạng
$$Y = x^2 e^{\alpha x} Q_n(x).$$

Ở đó $Q_n(x)$ là đa thức bậc n cần tìm.

Ví dụ:

$a)\ y'' - 3y' + 2y = x \qquad b)\ y'' + 4y' + 3y = (x+2)e^{-x} \qquad c)\ y'' - 2y' + y = 2xe^{x}.$

Giải: b) Xét PT đặc trưng: $\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0 \qquad (*)$.
PT có 2 nghiệm phân biệt $\lambda_1 = -1$ và $\lambda_2 = -3$. Nghiệm TQ của PT thuần nhất là

$$\bar{y} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x}.$$

Ta thấy: $f(x) = (x+2)e^{-x}$ mà -1 là nghiệm đơn của PT $(*)$ nên ta tìm nghiệm riêng Y của PT đã cho có dạng

$$Y = xe^{-x}(Ax + B) = e^{-x}(Ax^2 + Bx).$$

Giải: b) Xét PT đặc trưng: $\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0 \qquad (*)$.
PT có 2 nghiệm phân biệt $\lambda_1 = -1$ và $\lambda_2 = -3$. Nghiệm TQ của PT thuần nhất là

$$\bar{y} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x}.$$

Ta thấy: $f(x) = (x+2)e^{-x}$ mà -1 là nghiệm đơn của PT $(*)$ nên ta tìm nghiệm riêng Y của PT đã cho có dạng

$$Y = xe^{-x}(Ax+B) = e^{-x}(Ax^2+Bx).$$

Ta có: $Y' = e^{-x}(-Ax^2 - Bx) + e^{-x}(2Ax+B) = e^{-x}\big(-Ax^2 + (2A-B)x + B\big)$.

$Y'' = e^{-x}\big(Ax^2 - (4A-B)x + 2A - 2B\big)$.

Thay vào PT đã cho:

$$e^{-x}\big(Ax^2-(4A-B)x+2A-2B\big)+4e^{-x}\big(-Ax^2+(2A-B)x+B\big)+3e^{-x}(Ax^2+Bx) = (x+2)e^{-x}$$

$$\Leftrightarrow 4Ax + (2A+2B) = x+2 \Leftrightarrow \begin{cases} 4A = 1 \\ 2A + 2B = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \dfrac{1}{4} \\ B = \dfrac{3}{4}. \end{cases}$$

KL: Nghiệm TQ của PT đã cho là $y = \left(\dfrac{1}{4}x^2 + \dfrac{3}{4}x\right)e^{-x} + C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x}$.

2. PT không thuần nhất: $y'' + py' + qy = f(x) \quad (2)$.

   2.2. $f(x) = P_m(x)\cos\beta x + P_n(x)\sin\beta x$ với $\beta \in \mathbb{R}$ và $P_m(x), P_n(x)$ là đa thức bậc m, n.

   - **TH1**: Nếu $\pm i\beta$ không là nghiệm của PT $(*)$, thì nghiệm riêng Y của PT (2) có dạng
   $$Y = Q_\ell(x)\cos\beta x + R_\ell(x)\sin\beta x.$$
   - **TH2**: Nếu $\pm i\beta$ là nghiệm của PT $(*)$, thì nghiệm riêng Y của PT (2) có dạng
   $$Y = x\big(Q_\ell(x)\cos\beta x + R_\ell(x)\sin\beta x\big).$$

   Ở đó $Q_\ell(x)$ và $R_\ell(x)$ là hai đa thức bậc $\ell = \max\{m, n\}$ cần tìm.

2. PT không thuần nhất: $y'' + py' + qy = f(x) \quad (2)$.

$2.2.$ $f(x) = P_m(x)\cos\beta x + P_n(x)\sin\beta x$ với $\beta \in \mathbb{R}$ và $P_m(x), P_n(x)$ là đa thức bậc m, n.

- **TH1**: Nếu $\pm i\beta$ không là nghiệm của PT $(*)$, thì nghiệm riêng Y của PT (2) có dạng
$$Y = Q_\ell(x)\cos\beta x + R_\ell(x)\sin\beta x.$$
- **TH2**: Nếu $\pm i\beta$ là nghiệm của PT $(*)$, thì nghiệm riêng Y của PT (2) có dạng
$$Y = x\big(Q_\ell(x)\cos\beta x + R_\ell(x)\sin\beta x\big).$$

Ở đó $Q_\ell(x)$ và $R_\ell(x)$ là hai đa thức bậc $\ell = \max\{m, n\}$ cần tìm.

$2.3.$ $f(x) = e^{\alpha x}\big(P_m(x)\cos\beta x + P_n(x)\sin\beta x\big)$ với $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ và $P_m(x), P_n(x)$ là đa thức bậc m, n.

Cách giải: Đặt $y = e^{\alpha x}.z$. Tính y' và y'' và thay vào PT (2) ta thu được PT mới, trong đó hàm số vế phải có dạng 2.2 ở trên.

2. PT không thuần nhất: $y'' + py' + qy = f(x) \quad (2)$.

2.2. $f(x) = P_m(x)\cos\beta x + P_n(x)\sin\beta x$ với $\beta \in \mathbb{R}$ và $P_m(x), P_n(x)$ là đa thức bậc m, n.

- **TH1**: Nếu $\pm i\beta$ không là nghiệm của PT $(*)$, thì nghiệm riêng Y của PT (2) có dạng
$$Y = Q_\ell(x)\cos\beta x + R_\ell(x)\sin\beta x.$$
- **TH2**: Nếu $\pm i\beta$ là nghiệm của PT $(*)$, thì nghiệm riêng Y của PT (2) có dạng
$$Y = x\big(Q_\ell(x)\cos\beta x + R_\ell(x)\sin\beta x\big).$$

Ở đó $Q_\ell(x)$ và $R_\ell(x)$ là hai đa thức bậc $\ell = \max\{m, n\}$ cần tìm.

2.3. $f(x) = e^{\alpha x}\big(P_m(x)\cos\beta x + P_n(x)\sin\beta x\big)$ với $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ và $P_m(x), P_n(x)$ là đa thức bậc m, n.

Cách giải: Đặt $y = e^{\alpha x}.z$. Tính y' và y'' và thay vào PT (2) ta thu được PT mới, trong đó hàm số vế phải có dạng 2.2 ở trên.

Ví dụ:

$a)\ y'' + 3y' + 2y = e^x\cos 2x$ $\qquad b)\ y'' + y = 2x\cos x\cos 2x$

$c)\ y'' - 3y' + 2y = (x+1)\cos x$ $\qquad d)\ y'' - 6y' + 9y = 3x - 8e^{3x}$.

Bài 3: Phương trình vi phân cấp 2

Giải: c) Xét PT đặc trưng: $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \qquad (*)$.
PT có 2 nghiệm phân biệt $\lambda_1 = 1$ và $\lambda_2 = 2$. Nghiệm TQ của PT thuần nhất là

$$\bar{y} = C_1 e^x + C_2 e^{2x}.$$

Ta thấy: $f(x) = (x+1)\cos x = (x+1).\cos x + 0.\sin x$ mà $\pm i$ không là nghiệm của PT $(*)$ nên ta tìm nghiệm riêng Y của PT đã cho có dạng

$$Y = (Ax + B)\cos x + (Cx + D)\sin x.$$

Giải: c) Xét PT đặc trưng: $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \qquad (*)$.
PT có 2 nghiệm phân biệt $\lambda_1 = 1$ và $\lambda_2 = 2$. Nghiệm TQ của PT thuần nhất là

$$\bar{y} = C_1 e^x + C_2 e^{2x}.$$

Ta thấy: $f(x) = (x+1)\cos x = (x+1).\cos x + 0.\sin x$ mà $\pm i$ không là nghiệm của PT $(*)$ nên ta tìm nghiệm riêng Y của PT đã cho có dạng

$$Y = (Ax + B)\cos x + (Cx + D)\sin x.$$

Ta có: $Y' = (Cx + A + D)\cos x + (-Ax - B + C)\sin x.$

$Y'' = (-Ax - B + 2C)\cos x - (Cx + 2A + D)\sin x.$

Thay vào PT đã cho:

$$\big((A - 3C)x - 3A + B + 2C - 3D\big)\cos x + \big((3A + C)x - 2A + 3B - 3C + D\big)\sin x = (x+1)\cos x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A - 3C = 1, -3A + B + 2C - 3D = 1 \\ 3A + C = 0, -2A + 3B - 3C + D = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \dfrac{1}{10}, B = \dfrac{-1}{50} \\ C = \dfrac{-3}{10}, D = \dfrac{-16}{25}. \end{cases}$$

KL: $\quad y = \left(\dfrac{1}{10}x - \dfrac{1}{50}\right)\cos x - \left(\dfrac{3}{10}x + \dfrac{16}{25}\right)\sin x + C_1 e^x + C_2 e^{2x}.$

Bài 3: Phương trình vi phân cấp 2

3. PT Euler: $x^2y'' + axy' + by = 0$ với $a, b \in \mathbb{R}$.

- **Cách giải:** Đặt $t = \ln|x|$, tức là $|x| = e^t$, ta có:

$$y' = y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}.\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}.\frac{dy}{dt} = \frac{1}{x}.y'_t$$

3. PT Euler: $x^2y'' + axy' + by = 0$ với $a, b \in \mathbb{R}$.

- **Cách giải:** Đặt $t = \ln|x|$, tức là $|x| = e^t$, ta có:

$$y' = y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}.\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}.\frac{dy}{dt} = \frac{1}{x}.y'_t$$

$$y'' = y''_{xx} = \frac{dy'}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}.y'_t\right) = -\frac{1}{x^2}.y'_t + \frac{1}{x}.\frac{dy'_t}{dx}$$

$$= -\frac{1}{x^2}.y'_t + \frac{1}{x}.\frac{dy'_t}{dt}.\frac{dt}{dx} = -\frac{1}{x^2}.y'_t + \frac{1}{x^2}.y''_{tt}$$

Thay vào PT đã cho ta được

$$-y'_t + y''_{tt} + ay'_t + by = 0 \Leftrightarrow y''_{tt} + (a-1)y'_t + by = 0.$$

3. PT Euler: $x^2y'' + axy' + by = 0$ với $a, b \in \mathbb{R}$.

- **Cách giải:** Đặt $t = \ln|x|$, tức là $|x| = e^t$, ta có:

$$y' = y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}.\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}.\frac{dy}{dt} = \frac{1}{x}.y'_t$$

$$y'' = y''_{xx} = \frac{dy'}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}.y'_t\right) = -\frac{1}{x^2}.y'_t + \frac{1}{x}.\frac{dy'_t}{dx}$$

$$= -\frac{1}{x^2}.y'_t + \frac{1}{x}.\frac{dy'_t}{dt}.\frac{dt}{dx} = -\frac{1}{x^2}.y'_t + \frac{1}{x^2}.y''_{tt}$$

Thay vào PT đã cho ta được

$$-y'_t + y''_{tt} + ay'_t + by = 0 \Leftrightarrow y''_{tt} + (a-1)y'_t + by = 0.$$

- **Ví dụ:** $a)\ x^2y'' + 2xy' - 6y = 0$ $\quad b)\ x^2y'' - 2xy' + 2y = 2x^3 - x$
$c)\ x^2y'' - 9xy' + 21y = 0$ $\quad d)\ x^2y'' + xy' + y = x.$

Giải: c) Đặt $t = \ln|x|$ và lặp lại bước tính như trên để thay vào PT đã cho thu được

$$y''_t - 10y'_t + 21y = 0.$$

PT đặc trưng $\lambda^2 - 10\lambda + 21 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt $\lambda_1 = 3$ và $\lambda_2 = 7$. Nghiệm TQ của PT trên là: $\bar{y} = C_1e^{3t} + C_2e^{7t} \Rightarrow$ Nghiệm TQ của PT đã cho là $\bar{y} = C_1e^{3\ln|x|} + C_2e^{7\ln|x|} = C_1|x|^3 + C_2|x|^7$.

Bài 4: HỆ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP 1

Bài 4: Hệ phương trình vi phân cấp 1

I. Đại cương về hệ PTVP cấp 1

1. **Định nghĩa:** Hệ PTVP chuẩn tắc cấp 1 có dạng

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \cdots, y_n) \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, \cdots, y_n) \\ \vdots \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, \cdots, y_n). \end{cases} \quad (1)$$

Ví dụ: $\begin{cases} y_1' = x + 2y_1 - 3y_2 \\ y_2' = -x - 3y_1 + 4y_2. \end{cases}$

2. **Định lý về sự tồn tại và duy nhất nghiệm:**
Nếu các giả thiết sau thỏa mãn:
    - Các hàm $f_i(x, y_1, y_2, \cdots, y_n)$ và $\dfrac{\partial f_i}{\partial y_j}(x, y_1, y_2, \cdots, y_n)$ liên tục trên miền $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^{n+1}$.
    - $(x_0, y_1^0, y_2^0, \cdots, y_n^0) \in \mathcal{D}$.

   Khi đó: Trong một lân cận nào đó của x_0, tồn tại duy nhất một nghiệm $(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ của HPT (1) sao cho $y_i^0 = y_i(x_0)$ với mọi $i = \overline{1, n}$.

3. **Các cách gọi nghiệm của bài toán:**
   - Nghiệm tổng quát: Ta nói một bộ n hàm số $(y_1, y_2, \cdots, y_n)$, trong đó $y_i = g_i(x, C_1, C_2, \cdots, C_n)$ với $i = \overline{1, n}$ và $C_1, C_2, \cdots, C_n$ là các hằng số bất kì, là nghiệm TQ của HPT (1) nếu:
     i) $(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ thỏa mãn HPT (1) với mọi $C_1, C_2, \cdots, C_n$.
     ii) Với mọi $(x_0, y_1^0, y_2^0, \cdots, y_n^0) \in \mathcal{D}$, tồn tại $C_1 = C_1^0$, $C_2 = C_2^0$ và $C_n = C_n^0$ sao cho $g_i(x_0, C_1^0, C_2^0, \cdots, C_n^0) = y_i^0$ với mọi $i = \overline{1, n}$.
   - Nghiệm riêng là nghiệm nhận được từ nghiệm TQ khi cho các hằng số $C_1, C_2, \cdots, C_n$ các giá trị cụ thể.

3. **Các cách gọi nghiệm của bài toán:**
    - Nghiệm tổng quát: Ta nói một bộ n hàm số $(y_1, y_2, \cdots, y_n)$, trong đó $y_i = g_i(x, C_1, C_2, \cdots, C_n)$ với $i = \overline{1, n}$ và $C_1, C_2, \cdots, C_n$ là các hằng số bất kì, là nghiệm TQ của HPT (1) nếu:
        - i) $(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ thỏa mãn HPT (1) với mọi $C_1, C_2, \cdots, C_n$.
        - ii) Với mọi $(x_0, y_1^0, y_2^0, \cdots, y_n^0) \in \mathcal{D}$, tồn tại $C_1 = C_1^0$, $C_2 = C_2^0$ và $C_n = C_n^0$ sao cho $g_i(x_0, C_1^0, C_2^0, \cdots, C_n^0) = y_i^0$ với mọi $i = \overline{1, n}$.
    - Nghiệm riêng là nghiệm nhận được từ nghiệm TQ khi cho các hằng số $C_1, C_2, \cdots, C_n$ các giá trị cụ thể.
4. **Đưa PTVP cấp cao về hệ PTVP chuẩn tắc cấp 1 và ngược lại**
    - Xét PTVP cấp n: $\qquad y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \cdots, y^{(n-1)})$.
    Đặt $y_1 = y$, $y_2 = y'$, $\cdots$, $y_{n-1} = y^{(n-2)}$, $y_n = y^{(n-1)}$, PT trên trở thành

Bài 4: Hệ phương trình vi phân cấp 1

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ \vdots \\ y_{n-1}' = y_n \\ y_n' = f(x, y_1, y_2, \cdots, y_n). \end{cases} \longrightarrow \text{Hệ PTVP chuẩn tắc cấp 1}$$

- Ngược lại, một hệ PTVP chuẩn tắc cấp 1 đưa được về PTVP cấp cao bằng cách khử những hàm số chưa biết từ các PT của hệ (Phương pháp khử).

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ \vdots \\ y_{n-1}' = y_n \\ y_n' = f(x, y_1, y_2, \cdots, y_n). \end{cases} \longrightarrow \text{Hệ PTVP chuẩn tắc cấp 1}$$

- Ngược lại, một hệ PTVP chuẩn tắc cấp 1 đưa được về PTVP cấp cao bằng cách khử những hàm số chưa biết từ các PT của hệ (Phương pháp khử).

II. Phương pháp khử giải hệ PTVP cấp 1

1. **Cách giải:** Từ $(n-1)$ PT của hệ, ta rút $(n-1)$ hàm số theo 1 hàm số và thay vào PT còn lại của hệ. Giải PT thu được, từ đó xác định được nghiệm TQ của HPT.
2. **Ví dụ:** $a)\ \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 4y \end{cases}$ $\quad b)\ \begin{cases} y' = y - 5z \\ z' = 2y - z \end{cases}$

Bài 4: Hệ phương trình vi phân cấp 1

Giải: a) HPT $\Leftrightarrow \begin{cases} x' = 2x + y & (1) \\ y' = 3x + 4y & (2). \end{cases}$

Từ (1) ta có: $y = x' - 2x$, thay vào PT (2) ta được:

$$(x' - 2x)' = 3x + 4(x' - 2x) \Leftrightarrow x'' - 6x' + 5x = 0. \quad (*)$$

PT đặc trưng của PT $(*)$ là: $\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0$. Vì PT đặc trưng có 2 nghiệm phân biệt $\lambda_1 = 1$ và $\lambda_2 = 5$, nên nghiệm TQ của PT $(*)$ là $x = C_1e^t + C_2e^{5t}$.

Khi đó: $y = x' - 2x = C_1e^t + 5C_2e^{5t} - 2C_1e^t - 2C_2e^{5t} = -C_1e^t + 3C_2e^{5t}$.

KL: Nghiệm của HPT đã cho là $\begin{cases} x = C_1e^t + C_2e^{5t} \\ y = -C_1e^t + 3C_2e^{5t}. \end{cases}$

The end

Chúc các em học tốt!