Chương 1: CHUỖI

BỘ MÔN TOÁN CƠ BẢN

VIỆN TOÁN ỨNG DỤNG VÀ TIN HỌC

ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI

SAMI (HUST) – version 2023

Chương 1: CHUỖI

Bài 1: ĐẠI CƯƠNG VỀ CHUỖI SỐ

Bài 1: Đại cương về chuỗi số

I. Các định nghĩa và một số ví dụ ban đầu

Cho $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ là một dãy số bất kỳ. Tổng vô hạn các số hạng

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

được gọi là một chuỗi số và được ký hiệu là $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Khi đó:

I. Các định nghĩa và một số ví dụ ban đầu

Cho $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ là một dãy số bất kỳ. Tổng vô hạn các số hạng

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

được gọi là một chuỗi số và được ký hiệu là $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Khi đó:

- a_n được gọi là số hạng tổng quát.

Bài 1: Đại cương về chuỗi số

I. Các định nghĩa và một số ví dụ ban đầu

Cho $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ là một dãy số bất kỳ. Tổng vô hạn các số hạng

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

được gọi là một chuỗi số và được ký hiệu là $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Khi đó:

- a_n được gọi là số hạng tổng quát.
- $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ được gọi là tổng riêng thứ n.

Bài 1: Đại cương về chuỗi số

I. Các định nghĩa và một số ví dụ ban đầu

Cho $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ là một dãy số bất kỳ. Tổng vô hạn các số hạng

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

được gọi là một chuỗi số và được ký hiệu là $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Khi đó:

- a_n được gọi là số hạng tổng quát.
- $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ được gọi là tổng riêng thứ n.
- Nếu dãy số $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ có $\lim S_n = S$ là một số hữu hạn, thì ta nói chuỗi hội tụ (HT), có tổng bằng S và viết $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$.

I. Các định nghĩa và một số ví dụ ban đầu

Cho $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ là một dãy số bất kỳ. Tổng vô hạn các số hạng

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

được gọi là một chuỗi số và được ký hiệu là $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Khi đó:

- a_n được gọi là số hạng tổng quát.
- $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ được gọi là tổng riêng thứ n.
- Nếu dãy số $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ có $\lim S_n = S$ là một số hữu hạn, thì ta nói chuỗi hội tụ (HT), có tổng bằng S và viết $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$. Nếu dãy số $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ không có giới hạn hữu hạn, thì ta nói chuỗi phân kỳ (PK).

I. Các định nghĩa và một số ví dụ ban đầu

Cho $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ là một dãy số bất kỳ. Tổng vô hạn các số hạng

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

được gọi là một chuỗi số và được ký hiệu là $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Khi đó:

- a_n được gọi là số hạng tổng quát.
- $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ được gọi là tổng riêng thứ n.
- Nếu dãy số $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ có $\lim S_n = S$ là một số hữu hạn, thì ta nói chuỗi hội tụ (HT), có tổng bằng S và viết $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = S$. Nếu dãy số $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ không có giới hạn hữu hạn, thì ta nói chuỗi phân kỳ (PK).
- $R_n = S - S_n$ được gọi là phần dư thứ n. Nếu chuỗi HT, thì $\lim R_n = 0$.

Bài 1: Đại cương về chuỗi số

Ví dụ: Xét sự HT, PK và tính tổng (nếu có) của các chuỗi sau đây:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a.q^{n-1}$, với $a \neq 0$ (Chuỗi hình học).

Bài 1: Đại cương về chuỗi số

Ví dụ: Xét sự HT, PK và tính tổng (nếu có) của các chuỗi sau đây:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a.q^{n-1}$, với $a \neq 0$ (Chuỗi hình học).

Giải: Ta có $\begin{cases} S_n &= a + aq + \cdots + aq^{n-1} \\ qS_n &= aq + aq^2 + \cdots + aq^n \end{cases}$. Do đó $S_n = a\dfrac{1-q^n}{1-q}$ (với $q \neq 1$) và

$$\lim S_n = \begin{cases} \dfrac{a}{1-q} & \text{nếu } |q| < 1 \\ \infty & \text{nếu } |q| > 1. \end{cases}$$

- Nếu $q = 1$ thì $S_n = an \Rightarrow \lim S_n = \pm\infty$ tùy theo dấu của $a \Rightarrow$ Chuỗi PK.
- Nếu $q = -1$ thì $S_n = \begin{cases} 0 & \text{nếu } n \text{ chẵn} \\ a & \text{nếu } n \text{ lẻ} \end{cases} \Rightarrow$ không tồn tại $\lim S_n \Rightarrow$ Chuỗi PK.

KL: Chuỗi hình học đã cho HT và có tổng bằng $\dfrac{a}{1-q}$ nếu $|q| < 1$, PK nếu $|q| \geq 1$.

Bài 1: Đại cương về chuỗi số

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+2)}$.

2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$.

Giải: Phân tích $u_n = \dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+2}\Big)$. Ta có

$$S_n = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\Big) = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\Big)$$

Do đó $\lim S_n = 3/4$. KL: Chuỗi đã cho HT và có tổng bằng $3/4$.

Bài 1: Đại cương về chuỗi số

2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$.

Giải: Phân tích $u_n = \dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+2}\Big)$. Ta có

$$S_n = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\Big) = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\Big)$$

Do đó $\lim S_n = 3/4$. KL: Chuỗi đã cho HT và có tổng bằng $3/4$.

3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (Chuỗi điều hòa).

2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$.

Giải: Phân tích $u_n = \dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+2}\Big)$. Ta có

$$S_n = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\Big) = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\Big)$$

Do đó $\lim S_n = 3/4$. KL: Chuỗi đã cho HT và có tổng bằng $3/4$.

3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (Chuỗi điều hòa).

Giải: Với $1 < m \in \mathbb{N}$ bất kỳ, chọn $n > 2^{m+1}$ ta được

$$\begin{aligned} S_n &> 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2^{m+1}} \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \Big(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\Big) + \Big(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\Big) + \cdots + \Big(\frac{1}{2^m+1} + \cdots + \frac{1}{2^{m+1}}\Big) \\ &> 1 + \frac{1}{2} + 2.\frac{1}{4} + 4.\frac{1}{8} + \cdots + 2^m.\frac{1}{2^{m+1}} = 1 + \frac{m+1}{2} \Rightarrow \lim S_n = \infty \Rightarrow \text{Chuỗi PK.} \end{aligned}$$

II. Điều kiện cần để chuỗi HT

- **Định lý:** Nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ HT, thì $\lim a_n = 0$.

II. Điều kiện cần để chuỗi HT

- **Định lý:** Nếu chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ HT, thì $\lim a_n = 0$.

  CM: Ta có $a_n = S_n - S_{n-1}$. Vì $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ HT nên tồn tại $\lim S_n = S$ (hữu hạn) $\Rightarrow \lim S_{n-1} = S$.

  Do đó, $\lim a_n = \lim(S_n - S_{n-1}) = \lim S_n - \lim S_{n-1} = S - S = 0$.

II. Điều kiện cần để chuỗi HT

- **Định lý:** Nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ HT, thì $\lim a_n = 0$.

  CM: Ta có $a_n = S_n - S_{n-1}$. Vì $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ HT nên tồn tại $\lim S_n = S$ (hữu hạn) $\Rightarrow \lim S_{n-1} = S$.

  Do đó, $\lim a_n = \lim(S_n - S_{n-1}) = \lim S_n - \lim S_{n-1} = S - S = 0$.

- **Chú ý:** Chiều ngược lại là không đúng, tức là: Nếu $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ chưa chắc HT.

  Ví dụ: Chuỗi điều hòa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ có $\lim a_n = \lim \frac{1}{n} = 0$ nhưng chuỗi này PK (theo ví dụ trước).

II. Điều kiện cần để chuỗi HT

- **Định lý:** Nếu chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ HT, thì $\lim a_n = 0$.

  CM: Ta có $a_n = S_n - S_{n-1}$. Vì $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ HT nên tồn tại $\lim S_n = S$ (hữu hạn) $\Rightarrow \lim S_{n-1} = S$.

  Do đó, $\lim a_n = \lim(S_n - S_{n-1}) = \lim S_n - \lim S_{n-1} = S - S = 0$.

- **Chú ý:** Chiều ngược lại là không đúng, tức là: Nếu $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ thì chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ chưa chắc HT.

  Ví dụ: Chuỗi điều hòa $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ có $\lim a_n = \lim \frac{1}{n} = 0$ nhưng chuỗi này PK (theo ví dụ trước).

- **Phủ định:** Nếu $\lim a_n \neq 0$ hoặc $\nexists \lim a_n$, thì chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ PK.

  Ví dụ: $a)$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{3n+2}$ (PK do $\lim a_n = 2/3 \neq 0$) $b)$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ (PK do $\nexists \lim a_n$).

III. Các tính chất cơ bản của chuỗi số

- Tính HT, PK của chuỗi số không thay đổi khi ta bớt đi một số hữu hạn số hạng đầu tiên, tức là

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ và } \sum_{n=N_0}^{\infty} a_n \text{ (với mọi } N_0 > 1) \text{ cùng tính chất HT hoặc PK.}$$

III. Các tính chất cơ bản của chuỗi số

- Tính HT, PK của chuỗi số không thay đổi khi ta bớt đi một số hữu hạn số hạng đầu tiên, tức là

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ và } \sum_{n=N_0}^{\infty} a_n \text{ (với mọi } N_0 > 1\text{) cùng tính chất HT hoặc PK.}$$

- Nếu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = S_1$ và $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = S_2$, thì với mọi α, $\beta \in \mathbb{R}$ ta có $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha S_1 + \beta S_2$.

III. Các tính chất cơ bản của chuỗi số

- Tính HT, PK của chuỗi số không thay đổi khi ta bớt đi một số hữu hạn số hạng đầu tiên, tức là

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ và } \sum_{n=N_0}^{\infty} a_n \text{ (với mọi } N_0 > 1) \text{ cùng tính chất HT hoặc PK.}$$

- Nếu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = S_1$ và $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = S_2$, thì với mọi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ta có $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha S_1 + \beta S_2$.

Bài tập: Xét sự HT, PK của chuỗi số sau:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$ $\left(\text{HT bằng cách phân tích } a_n = \dfrac{1}{n^2} - \dfrac{1}{(n+1)^2}\right)$.

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{n+2}{n+1}\right)^n$ $\left(\text{PK vì } \lim a_n = e \neq 0\right)$.

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{n-1}{n+3}\right)^{\sqrt{n}}$ $\left(\text{PK vì } \lim a_n = 1 \neq 0\right)$.

Bài 2: CHUỖI SỐ DƯƠNG

Bài 2: Chuỗi số dương

- **Định nghĩa**: Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ được gọi là một chuỗi số dương nếu $a_n > 0, \forall n \geq 1$.

Bài 2: Chuỗi số dương

- **Định nghĩa**: Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ được gọi là một chuỗi số dương nếu $a_n > 0, \forall n \geq 1$.
- **Chú ý**: Chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ HT $\Leftrightarrow S_n$ bị chặn (do tính chất đơn điệu của dãy số).

Bài 2: Chuỗi số dương

- **Định nghĩa**: Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ được gọi là một chuỗi số dương nếu $a_n > 0, \forall n \geq 1$.
- **Chú ý**: Chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ HT $\Leftrightarrow S_n$ bị chặn (do tính chất đơn điệu của dãy số).

I. Các tiêu chuẩn so sánh

1. **Tiêu chuẩn so sánh 1:** Cho 2 chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ và $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ thỏa mãn

$$a_n \leq b_n \quad \text{với mọi } n \geq N_0 \in \mathbb{N}.$$

Khi đó: • $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ HT $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ HT • $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ PK $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ PK.

Bài 2: Chuỗi số dương

- **Định nghĩa**: Chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ được gọi là một chuỗi số dương nếu $a_n > 0, \forall n \geq 1$.
- **Chú ý**: Chuỗi số dương $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ HT $\Leftrightarrow S_n$ bị chặn (do tính chất đơn điệu của dãy số).

I. Các tiêu chuẩn so sánh

1. **Tiêu chuẩn so sánh 1**: Cho 2 chuỗi số dương $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ và $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ thỏa mãn

$$a_n \leq b_n \quad \text{với mọi } n \geq N_0 \in \mathbb{N}.$$

Khi đó: • $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ HT $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ HT • $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ PK $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ PK.

CM: Coi $N_0 = 1$, từ giả thiết ta có $A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leq b_1 + b_2 + \cdots + b_n = B_n$. Nếu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ HT, thì tồn tại $\lim B_n = B$ và $B_n \leq B$ với mọi n. Do đó, A_n bị chặn trên. Vì A_n là dãy tăng, nên tồn tại $\lim A_n = A \Rightarrow$ Chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ HT. Tương tự cho trường hợp còn lại.

Bài 2: Chuỗi số dương

Ví dụ: $a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n+1}$ HT do $a_n = \frac{1}{2^n+1} < b_n = \frac{1}{2^n}$ và $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ HT $\left(\text{chuỗi hình học với } q = \frac{1}{2}\right)$.

$b) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ PK do $a_n = \frac{1}{\ln n} > b_n = \frac{1}{n}$ (vì $\ln n < n$ với mọi $n \geq 2$) và $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ PK (chuỗi điều hòa).

Bài 2: Chuỗi số dương

Ví dụ: $a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n+1}$ HT do $a_n = \frac{1}{2^n+1} < b_n = \frac{1}{2^n}$ và $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ HT $\left(\text{chuỗi hình học với } q = \frac{1}{2}\right)$.

$b) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ PK do $a_n = \frac{1}{\ln n} > b_n = \frac{1}{n}$ (vì $\ln n < n$ với mọi $n \geq 2$) và $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ PK (chuỗi điều hòa).

2. **Tiêu chuẩn so sánh 2:** Cho 2 chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ và $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ thỏa mãn: $\lim \frac{a_n}{b_n} = L \in (0, \infty)$.

Khi đó: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ và $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ cùng HT hoặc cùng PK.

Bài 2: Chuỗi số dương

Ví dụ: $a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n+1}$ HT do $a_n = \frac{1}{2^n+1} < b_n = \frac{1}{2^n}$ và $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ HT $\left(\text{chuỗi hình học với } q = \frac{1}{2}\right)$.

$b)\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ PK do $a_n = \frac{1}{\ln n} > b_n = \frac{1}{n}$ (vì $\ln n < n$ với mọi $n \geq 2$) và $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ PK (chuỗi điều hòa).

2. **Tiêu chuẩn so sánh 2:** Cho 2 chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ và $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ thỏa mãn: $\lim \frac{a_n}{b_n} = L \in (0, \infty)$.

Khi đó: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ và $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ cùng HT hoặc cùng PK.

CM: Vì $\lim \frac{a_n}{b_n} = L$ nên với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại số $N_0 \in \mathbb{N}$ sao cho

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - L\right| < \varepsilon \Leftrightarrow L - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < L + \varepsilon \Leftrightarrow (L-\varepsilon)b_n < a_n < (L+\varepsilon)b_n \ \forall\, n \geq N_0.$$

Kết hợp bất đẳng thức này và Tiêu chuẩn so sánh 1, ta có điều phải chứng minh.

Bài 2: Chuỗi số dương

Ví dụ: $a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-1}{\sqrt{4n^5+n}}$ PK do $a_n = \frac{n^2-1}{\sqrt{4n^5+n}}$ và xét $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ có $\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{2}$. Vì vậy, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ và $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ cùng HT hoặc PK. Mặt khác, $b_n \geq c_n = \frac{1}{n}$ và $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ PK (chuỗi điều hòa) $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ PK.

Bài 2: Chuỗi số dương

Ví dụ: $a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-1}{\sqrt{4n^5+n}}$ PK do $a_n = \frac{n^2-1}{\sqrt{4n^5+n}}$ và xét $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ có $\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{2}$. Vì vậy, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ và $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ cùng HT hoặc PK. Mặt khác, $b_n \geq c_n = \frac{1}{n}$ và $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ PK (chuỗi điều hòa) $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ PK.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2^n}{3^n-2^n}$ HT do $a_n = \frac{1+2^n}{3^n-2^n}$ và xét $b_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$ có $\lim \frac{a_n}{b_n} = 1$. Vì vậy, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ và $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ cùng HT hoặc PK. Mặt khác, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ HT $\left(\text{chuỗi hình học với } q = \frac{2}{3}\right)$.

Bài 2: Chuỗi số dương

Ví dụ: a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2-1}{\sqrt{4n^5+n}}$ PK do $a_n = \dfrac{n^2-1}{\sqrt{4n^5+n}}$ và xét $b_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ có $\lim \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{1}{2}$. Vì vậy, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ và $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ cùng HT hoặc PK. Mặt khác, $b_n \geq c_n = \dfrac{1}{n}$ và $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ PK (chuỗi điều hòa) $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ PK.

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1+2^n}{3^n-2^n}$ HT do $a_n = \dfrac{1+2^n}{3^n-2^n}$ và xét $b_n = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ có $\lim \dfrac{a_n}{b_n} = 1$. Vì vậy, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ và $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ cùng HT hoặc PK. Mặt khác, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ HT $\left(\text{chuỗi hình học với } q = \dfrac{2}{3}\right)$.

Chú ý:

- Nếu $L = 1$ thì ta viết $a_n \sim b_n$.
- Nếu $L = 0$ thì $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ HT $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ HT, $\quad \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ PK $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ PK.
- Nếu $L = \infty$ thì $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ HT $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ HT, $\quad \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ PK $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ PK.

Bài 2: Chuỗi số dương

II. Các tiêu chuẩn điển hình khác

1. **Tiêu chuẩn D'Alembert, Tiêu chuẩn Cauchy:**

Cho chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ và $\lim \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = L$ (D'Alembert) hoặc $\lim \sqrt[n]{a_n} = L$ (Cauchy).

Khi đó: • $L < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ HT • $L > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ PK.

II. Các tiêu chuẩn điển hình khác

1. Tiêu chuẩn D'Alembert, Tiêu chuẩn Cauchy:

Cho chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ và $\lim \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = L$ (D'Alembert) hoặc $\lim \sqrt[n]{a_n} = L$ (Cauchy).

Khi đó: $\bullet\ L < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ HT $\quad \bullet\ L > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ PK.

CM: Ta chỉ cần chứng minh cho TC D'Alembert vì TC Cauchy được chứng minh tương tự. Theo giả thiết $\lim \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = L$ nên với mọi $\varepsilon > 0$ tồn tại số N_0 sao cho $L - \varepsilon < \dfrac{a_{n+1}}{a_n} < L + \varepsilon,\ \forall n > N_0$.

- Nếu $L < 1$, chọn ε đủ nhỏ sao cho $L + \varepsilon < 1$. Coi $N_0 = 1$, ta có

$$a_n < (L+\varepsilon)a_{n-1} < (L+\varepsilon)^2 a_{n-2} < \cdots < a_1(L+\varepsilon)^{n-1} = \frac{a_1}{L+\varepsilon}.(L+\varepsilon)^n = b_n,\ \forall n > 1.$$

  Vì $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ HT (chuỗi hình học với $q = L + \varepsilon$) nên $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ cũng HT (theo TCSS 1).

- Nếu $L > 1$, chọn ε đủ nhỏ sao cho $L - \varepsilon > 1$. Tương tự như trên, ta có điều phải chứng minh.

Bài 2: Chuỗi số dương

- **Ví dụ:** Xét sự HT, PK của các chuỗi số sau:

  a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(n+1)!}$ HT theo TC D'Alembert do $L = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{2}{n+2} = 0 < 1.$

  b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$ PK theo TC D'Alembert do $L = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{3}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{3}{e} > 1.$

  c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n^2-1}{2n^2-n+1}\right)^n$ PK theo TC Cauchy do $L = \lim \sqrt[n]{a_n} = \lim \frac{3n^2-1}{2n^2-n+1} = \frac{3}{2} > 1.$

  d) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{n+3}\right)^{n(n+4)}$ HT theo TC Cauchy do $L = \lim \sqrt[n]{a_n} = \lim \left(\frac{n+2}{n+3}\right)^{n+4} = e^{-1} < 1.$

Bài 2: Chuỗi số dương

- **Ví dụ:** Xét sự HT, PK của các chuỗi số sau:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(n+1)!}$ HT theo TC D'Alembert do $L = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{2}{n+2} = 0 < 1.$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$ PK theo TC D'Alembert do $L = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{3}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{3}{e} > 1.$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n^2-1}{2n^2-n+1}\right)^n$ PK theo TC Cauchy do $L = \lim \sqrt[n]{a_n} = \lim \frac{3n^2-1}{2n^2-n+1} = \frac{3}{2} > 1.$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{n+3}\right)^{n(n+4)}$ HT theo TC Cauchy do $L = \lim \sqrt[n]{a_n} = \lim \left(\frac{n+2}{n+3}\right)^{n+4} = e^{-1} < 1.$

- **Chú ý:** Thông thường, chuỗi có chứa dấu giai thừa ta áp dụng TC D'Alembert và chuỗi có chứa mũ bậc n ta áp dụng TC Cauchy. Đặc biệt, nếu $L = 1$, thì ta chưa có kết luận tính chất HT, PK.

Bài 2: Chuỗi số dương

Câu hỏi: Có hay không mối liên hệ giữa

$$\int_1^\infty f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b f(x)dx \quad \text{và} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k?$$

Bài 2: Chuỗi số dương

Câu hỏi: Có hay không mối liên hệ giữa

$$\int_1^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b f(x)dx \quad \text{và} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k?$$

2. **Tiêu chuẩn tích phân:** Nếu hàm số $f(x)$ liên tục, dương, giảm trên khoảng $[N_0, \infty)$ thỏa mãn $f(n) = a_n$, thì

$$\int_{N_0}^{\infty} f(x)dx \quad \text{và} \quad \sum_{n=N_0}^{\infty} a_n \quad \text{cùng HT hoặc cùng PK.}$$

Bài 2: Chuỗi số dương

Câu hỏi: Có hay không mối liên hệ giữa

$$\int_1^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b f(x)dx \quad \text{và} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k?$$

2. **Tiêu chuẩn tích phân:** Nếu hàm số $f(x)$ liên tục, dương, giảm trên khoảng $[N_0, \infty)$ thỏa mãn $f(n) = a_n$, thì

$$\int_{N_0}^{\infty} f(x)dx \quad \text{và} \quad \sum_{n=N_0}^{\infty} a_n \quad \text{cùng HT hoặc cùng PK.}$$

CM: Coi $N_0 = 1$. Vì $f(x)$ là hàm số giảm nên

$$a_{n+1} = f(n+1) \le f(x) \le f(n) = a_n \ \text{ với } x \in [n, n+1] \text{ và } n = 1, 2, \cdots$$

Lấy tích phân từ n đến $n+1$ của các vế ta được $a_{n+1} \le \int_n^{n+1} f(x)dx \le a_n$ với $n = 1, 2, \cdots$. Khi đó:

$$a_2 + a_3 + \cdots + a_M \le \int_1^2 f(x)dx + \int_2^3 f(x)dx + \cdots + \int_{M-1}^{M} f(x)dx \le a_1 + a_2 + \cdots + a_{M-1}$$

Bài 2: Chuỗi số dương

hay $\quad S_M - a_1 = a_2 + a_3 + \cdots + a_M \le \displaystyle\int_1^M f(x)dx \le a_1 + a_2 + \cdots + a_{M-1} = S_{M-1}.$

- Nếu $\displaystyle\int_1^{\infty} f(x)dx$ HT $\Rightarrow \displaystyle\lim_{M\to\infty} \int_1^M f(x)dx = S \Rightarrow S_M - a_1$ là một dãy số tăng và bị chặn trên bởi S nên tồn tại $\displaystyle\lim_{M\to\infty} (S_M - a_1) = A \Rightarrow$ Chuỗi $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ HT (hơn nữa có tổng bằng $A + a_1$).
- Nếu $\displaystyle\int_1^{\infty} f(x)dx \Rightarrow \lim_{M\to\infty} \int_1^M f(x)dx = \infty \Rightarrow \lim_{M\to\infty} S_{M-1} = \infty$. Chuỗi $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ PK.

Bài 2: Chuỗi số dương

hay $\quad S_M - a_1 = a_2 + a_3 + \cdots + a_M \leq \displaystyle\int_1^M f(x)dx \leq a_1 + a_2 + \cdots + a_{M-1} = S_{M-1}.$

- Nếu $\displaystyle\int_1^\infty f(x)dx$ HT $\Rightarrow \displaystyle\lim_{M\to\infty}\int_1^M f(x)dx = S \Rightarrow S_M - a_1$ là một dãy số tăng và bị chặn trên bởi S nên tồn tại $\displaystyle\lim_{M\to\infty}(S_M - a_1) = A \Rightarrow$ Chuỗi $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty a_n$ HT (hơn nữa có tổng bằng $A + a_1$).
- Nếu $\displaystyle\int_1^\infty f(x)dx \Rightarrow \lim_{M\to\infty}\int_1^M f(x)dx = \infty \Rightarrow \lim_{M\to\infty} S_{M-1} = \infty$. Chuỗi $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty a_n$ PK.

Ví dụ: $a)\displaystyle\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$ PK bởi xét hàm số $f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{\ln x}}$ trên $[2,\infty)$ thỏa mãn các đk của TC Tích phân và $\displaystyle\int_2^\infty f(x)dx = 2\sqrt{\ln x}\Big|_2^\infty = \infty.$

$b)\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s}$ với $s \in \mathbb{R}$ (Chuỗi Riemann) HT nếu $s > 1$, PK nếu $s \leq 1$. Gợi ý: Xét hàm số $f(x) = \dfrac{1}{x^s}$ trên $[1,\infty)$ và áp dụng TC Tích phân nếu $s > 0$. Nếu $s \leq 0 \Rightarrow \lim a_n \neq 0$.

Bài 3: CHUỖI SỐ CÓ SỐ HẠNG VỚI DẤU BẤT KỲ

Bài 3: Chuỗi số có số hạng với dấu bất kỳ

I. Hội tụ tuyệt đối và bán hội tụ

1. **Định nghĩa:** Cho chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ với các số hạng a_n có dấu bất kỳ. Khi đó:
   - $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ được gọi là hội tụ tuyệt đối (HTTĐ) nếu $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ HT.

I. Hội tụ tuyệt đối và bán hội tụ

1. **Định nghĩa:** Cho chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ với các số hạng a_n có dấu bất kỳ. Khi đó:
   - $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ được gọi là hội tụ tuyệt đối (HTTĐ) nếu $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ HT.
   - $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ được gọi là bán hội tụ (BHT) nếu $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ PK và $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ HT.

Bài 3: Chuỗi số có số hạng với dấu bất kỳ

I. Hội tụ tuyệt đối và bán hội tụ

1. **Định nghĩa:** Cho chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ với các số hạng a_n có dấu bất kỳ. Khi đó:

- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ được gọi là hội tụ tuyệt đối (HTTĐ) nếu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ HT.
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ được gọi là bán hội tụ (BHT) nếu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ PK và $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ HT.

Ví dụ: $a)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{\sqrt{n^3+1}}$ là HTTĐ vì $|a_n| = \frac{|\sin n|}{\sqrt{n^3+1}} \le \frac{1}{\sqrt{n^3+1}} \sim \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} = b_n$ và $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ HT.

$b)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ là BHT vì $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ PK và $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ HT (theo TC Leibniz, ta CM sau).

Bài 3: Chuỗi số có số hạng với dấu bất kỳ

I. Hội tụ tuyệt đối và bán hội tụ

1. **Định nghĩa:** Cho chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ với các số hạng a_n có dấu bất kỳ. Khi đó:

   - $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ được gọi là hội tụ tuyệt đối (HTTĐ) nếu $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ HT.
   - $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ được gọi là bán hội tụ (BHT) nếu $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ PK và $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ HT.

   Ví dụ: $a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{\sqrt{n^3+1}}$ là HTTĐ vì $|a_n| = \frac{|\sin n|}{\sqrt{n^3+1}} \le \frac{1}{\sqrt{n^3+1}} \sim \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} = b_n$ và $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ HT.

   $b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ là BHT vì $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ PK và $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ HT (theo TC Leibniz, ta CM sau).

2. **Định lý:** Nếu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ HTTĐ, thì $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ HT.

Bài 3: Chuỗi số có số hạng với dấu bất kỳ

CM: Đặt $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ và $T_n = |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|$, ta có

$$\begin{aligned} S_n + T_n &= (a_1 + |a_1|) + (a_2 + |a_2|) + \cdots + (a_n + |a_n|) \\ &\leq 2|a_1| + 2|a_2| + \cdots + 2|a_n| \leq 2T, \end{aligned}$$

ở đó $T = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ $\left(\text{do } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ HTTĐ}\right)$ $\Rightarrow \{S_n + T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ là một dãy số tăng và bị chặn trên, nên tồn tại $A = \lim(S_n + T_n) \Rightarrow \lim S_n = A - \lim T_n = A - T$. Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ HT và có tổng bằng $A - T$.

CM: Đặt $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ và $T_n = |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|$, ta có

$$\begin{aligned} S_n + T_n &= (a_1 + |a_1|) + (a_2 + |a_2|) + \cdots + (a_n + |a_n|) \\ &\leq 2|a_1| + 2|a_2| + \cdots + 2|a_n| \leq 2T, \end{aligned}$$

ở đó $T = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| \left(\text{do } \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \text{ HTTĐ}\right) \Rightarrow \{S_n + T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ là một dãy số tăng và bị chặn trên, nên tồn tại $A = \lim(S_n + T_n) \Rightarrow \lim S_n = A - \lim T_n = A - T$. Chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ HT và có tổng bằng $A - T$.

3. **Chú ý:**

- Nếu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ PK, thì $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ có thể HT hoặc PK.

Ví dụ: $a) \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$ $\qquad b) \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n}$.

CM: Đặt $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ và $T_n = |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|$, ta có

$$\begin{aligned} S_n + T_n &= (a_1 + |a_1|) + (a_2 + |a_2|) + \cdots + (a_n + |a_n|) \\ &\leq 2|a_1| + 2|a_2| + \cdots + 2|a_n| \leq 2T, \end{aligned}$$

ở đó $T = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| \left(\text{do } \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \text{ HTTĐ}\right) \Rightarrow \{S_n + T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ là một dãy số tăng và bị chặn trên, nên tồn tại $A = \lim(S_n + T_n) \Rightarrow \lim S_n = A - \lim T_n = A - T$. Chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ HT và có tổng bằng $A - T$.

3. **Chú ý:**

- Nếu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ PK, thì $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ có thể HT hoặc PK.

  Ví dụ: $a) \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$ $\qquad b) \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n}$.

- Nếu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ PK theo tiêu chuẩn D'Alembert hoặc tiêu chuẩn Cauchy, thì $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ PK.

Bài 3: Chuỗi số có số hạng với dấu bất kỳ

- TC D'Alembert, TC Cauchy (mở rộng): $\lim \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = L$ hoặc $\lim \sqrt[n]{|a_n|} = L$, ta có

  i) $L < 1 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|, \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ cùng HT   ii) $L > 1 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|, \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ cùng PK.

Bài 3: Chuỗi số có số hạng với dấu bất kỳ

- TC D'Alembert, TC Cauchy (mở rộng): $\lim \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = L$ hoặc $\lim \sqrt[n]{|a_n|} = L$, ta có

  i) $L < 1 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|, \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ cùng HT ii) $L > 1 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|, \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ cùng PK.

II. Chuỗi số đan dấu

1. **Định nghĩa:** Chuỗi số đan dấu là chuỗi số có dạng $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ với $a_n > 0, \forall n \geq 1$.

Bài 3: Chuỗi số có số hạng với dấu bất kỳ

- TC D'Alembert, TC Cauchy (mở rộng): $\lim \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = L$ hoặc $\lim \sqrt[n]{|a_n|} = L$, ta có

  i) $L < 1 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|, \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ cùng HT ii) $L > 1 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|, \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ cùng PK.

II. Chuỗi số đan dấu

1. **Định nghĩa:** Chuỗi số đan dấu là chuỗi số có dạng $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ với $a_n > 0, \forall n \geq 1$.

   - **Chú ý:** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} a_n$ với $a_n > 0, \forall n \geq 1$ cũng là một chuỗi số đan dấu.

Bài 3: Chuỗi số có số hạng với dấu bất kỳ

- TC D'Alembert, TC Cauchy (mở rộng): $\lim \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = L$ hoặc $\lim \sqrt[n]{|a_n|} = L$, ta có

  i) $L < 1 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|, \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ cùng HT ii) $L > 1 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|, \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ cùng PK.

II. Chuỗi số đan dấu

1. **Định nghĩa:** Chuỗi số đan dấu là chuỗi số có dạng $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ với $a_n > 0, \forall n \geq 1$.

   - **Chú ý:** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ với $a_n > 0, \forall n \geq 1$ cũng là một chuỗi số đan dấu.

2. **Định lý (Tiêu chuẩn Leibniz):** Nếu $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ là một dãy dương, giảm và $\lim a_n = 0$ thì $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ HT và $0 \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n \leq a_1$.

- TC D'Alembert, TC Cauchy (mở rộng): $\lim \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = L$ hoặc $\lim \sqrt[n]{|a_n|} = L$, ta có

  i) $L < 1 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|, \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ cùng HT ii) $L > 1 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|, \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ cùng PK.

II. Chuỗi số đan dấu

1. **Định nghĩa:** Chuỗi số đan dấu là chuỗi số có dạng $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ với $a_n > 0, \forall n \geq 1$.

   - **Chú ý:** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ với $a_n > 0, \forall n \geq 1$ cũng là một chuỗi số đan dấu.

2. **Định lý (Tiêu chuẩn Leibniz):** Nếu $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ là một dãy dương, giảm và $\lim a_n = 0$ thì $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ HT và $0 \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n \leq a_1$.

   CM: Xét dãy tổng riêng S_{2n} có

$$S_{2n+2} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_{2n} - a_{2n+2}) \geq S_{2n}.$$

Bài 3: Chuỗi số có số hạng với dấu bất kỳ

Mặt khác

$$S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - \cdots (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n} \leq a_1.$$

Như vậy, dãy tổng riêng chẵn $\{S_{2n}\}$ là một dãy số tăng và bị chặn trên bởi a_1 nên tồn tại $\lim S_{2n} = S \leq a_1$. Xét dãy tổng riêng lẻ $S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1}$ nên

$$\lim S_{2n+1} = \lim S_{2n} + \lim a_{2n+1} = S + 0 = S \Rightarrow \lim S_n = S.$$

Mặt khác

$$S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - \cdots (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n} \le a_1.$$

Như vậy, dãy tổng riêng chẵn $\{S_{2n}\}$ là một dãy số tăng và bị chặn trên bởi a_1 nên tồn tại $\lim S_{2n} = S \le a_1$. Xét dãy tổng riêng lẻ $S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1}$ nên

$$\lim S_{2n+1} = \lim S_{2n} + \lim a_{2n+1} = S + 0 = S \Rightarrow \lim S_n = S.$$

Ví dụ: Xét sự HTTĐ, BHT của các chuỗi số sau:

$a)$ $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ là BHT vì $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ PK và $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ HT (theo TC Leibniz).

$b)$ $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \tan \frac{1}{n\sqrt{n}}$ là HTTĐ vì $|a_n| = \tan \frac{1}{n\sqrt{n}} \sim \frac{1}{n\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} = b_n$ và $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ HT $\Big($Chuỗi Riemann với $s = \frac{3}{2} > 1\Big) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ HT (theo TCSS 2).

Bài 3: Chuỗi số có số hạng với dấu bất kỳ

II. Tính chất của chuỗi HTTĐ, BHT

- Nếu một chuỗi là HTTĐ có tổng bằng S, thì khi ta thay đổi thứ tự của các số hạng của chuỗi đó hoặc nhóm một cách tùy ý các số hạng, ta được một chuỗi mới cũng HTTĐ và có tổng bằng S.

II. Tính chất của chuỗi HTTĐ, BHT

- Nếu một chuỗi là HTTĐ có tổng bằng S, thì khi ta thay đổi thứ tự của các số hạng của chuỗi đó hoặc nhóm một cách tùy ý các số hạng, ta được một chuỗi mới cũng HTTĐ và có tổng bằng S.
- Nếu một chuỗi là BHT, thì ta có thể thay đổi thứ tự của các số hạng của chuỗi đó để tạo ra một chuỗi mới HT có tổng bằng một số bất kỳ hoặc trở nên PK.

Bài 3: Chuỗi số có số hạng với dấu bất kỳ

II. Tính chất của chuỗi HTTĐ, BHT

- Nếu một chuỗi là HTTĐ có tổng bằng S, thì khi ta thay đổi thứ tự của các số hạng của chuỗi đó hoặc nhóm một cách tùy ý các số hạng, ta được một chuỗi mới cũng HTTĐ và có tổng bằng S.
- Nếu một chuỗi là BHT, thì ta có thể thay đổi thứ tự của các số hạng của chuỗi đó để tạo ra một chuỗi mới HT có tổng bằng một số bất kỳ hoặc trở nên PK.
- **Tích của hai chuỗi:** Cho hai chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ và $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ bất kỳ. Khi đó:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n, \quad \text{trong đó } c_n = \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n+1-k}.$$

Bài 3: Chuỗi số có số hạng với dấu bất kỳ

II. Tính chất của chuỗi HTTĐ, BHT

- Nếu một chuỗi là HTTĐ có tổng bằng S, thì khi ta thay đổi thứ tự của các số hạng của chuỗi đó hoặc nhóm một cách tùy ý các số hạng, ta được một chuỗi mới cũng HTTĐ và có tổng bằng S.
- Nếu một chuỗi là BHT, thì ta có thể thay đổi thứ tự của các số hạng của chuỗi đó để tạo ra một chuỗi mới HT có tổng bằng một số bất kỳ hoặc trở nên PK.
- **Tích của hai chuỗi:** Cho hai chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ và $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ bất kỳ. Khi đó:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n, \quad \text{trong đó } c_n = \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n+1-k}.$$

Tính chất: Nếu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ HTTĐ có $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| = S_1$ và $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ HTTĐ có $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |b_n| = S_2$ thì $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ cũng HTTĐ và có $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |c_n| = S_1 S_2$.

Bài 4: CHUỖI HÀM SỐ

I. Chuỗi hàm số HT, PK

1. **Định nghĩa:** Cho dãy các hàm số $\{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ xác định trên tập $\mathcal{D}$. Tổng vô hạn các hàm số

$$u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots$$

được gọi là một chuỗi hàm số và được ký hiệu là $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$.

I. Chuỗi hàm số HT, PK

1. **Định nghĩa:** Cho dãy các hàm số $\{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ xác định trên tập $\mathcal{D}$. Tổng vô hạn các hàm số

$$u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots$$

được gọi là một chuỗi hàm số và được ký hiệu là $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$. Khi đó:

- Chuỗi hàm số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ HT tại $x_0 \in \mathcal{D}$ $\Leftrightarrow$ Chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ HT.
- Chuỗi hàm số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ PK tại $x_0 \in \mathcal{D}$ $\Leftrightarrow$ Chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ PK.

Bài 4: Chuỗi hàm số

I. Chuỗi hàm số HT, PK

1. **Định nghĩa:** Cho dãy các hàm số $\{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ xác định trên tập $\mathcal{D}$. Tổng vô hạn các hàm số

$$u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots$$

được gọi là một chuỗi hàm số và được ký hiệu là $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$. Khi đó:

- Chuỗi hàm số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ HT tại $x_0 \in \mathcal{D}$ $\Leftrightarrow$ Chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ HT.
- Chuỗi hàm số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ PK tại $x_0 \in \mathcal{D}$ $\Leftrightarrow$ Chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ PK.
- Tập hợp các điểm HT của chuỗi hàm số được gọi là miền HT.

Bài 4: Chuỗi hàm số

2. **Ví dụ:** Xác định miền HT của các chuỗi hàm số sau:

   $a)\ \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$. Giải: TXĐ: $\mathbb{R}$. Lấy $x_0 \in \mathbb{R}$, ta xét chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} x_0^{n-1}$. Chuỗi hình học này HT nếu $|x_0| < 1 \Leftrightarrow x_0 \in (-1, 1)$ và PK nếu $|x_0| \geq 1 \Leftrightarrow x_0 \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$. KL: MHT$= (-1, 1)$.

   $b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$. Giải: TXĐ: $\mathbb{R}$. Lấy $x_0 \in \mathbb{R}$, ta xét chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{x_0}}$. Chuỗi Riemann này HT nếu $x_0 > 1$ và PK nếu $x_0 \leq 1$. KL: MHT$= (1, \infty)$.

Bài 4: Chuỗi hàm số

2. **Ví dụ:** Xác định miền HT của các chuỗi hàm số sau:

   $a)\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$. Giải: TXĐ: $\mathbb{R}$. Lấy $x_0 \in \mathbb{R}$, ta xét chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} x_0^{n-1}$. Chuỗi hình học này HT nếu $|x_0| < 1 \Leftrightarrow x_0 \in (-1, 1)$ và PK nếu $|x_0| \geq 1 \Leftrightarrow x_0 \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$. KL: MHT$= (-1, 1)$.

   $b)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$. Giải: TXĐ: $\mathbb{R}$. Lấy $x_0 \in \mathbb{R}$, ta xét chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{x_0}}$. Chuỗi Riemann này HT nếu $x_0 > 1$ và PK nếu $x_0 \leq 1$. KL: MHT$= (1, \infty)$.

3. **Chú ý:**

   - Tổng của $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ là hàm số $S(x)$ xác định trong miền HT của nó.

2. **Ví dụ:** Xác định miền HT của các chuỗi hàm số sau:

$a)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$. Giải: TXĐ: $\mathbb{R}$. Lấy $x_0 \in \mathbb{R}$, ta xét chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_0^{n-1}$. Chuỗi hình học này HT nếu $|x_0| < 1 \Leftrightarrow x_0 \in (-1, 1)$ và PK nếu $|x_0| \geq 1 \Leftrightarrow x_0 \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$. KL: MHT$= (-1, 1)$.

$b)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^x}$. Giải: TXĐ: $\mathbb{R}$. Lấy $x_0 \in \mathbb{R}$, ta xét chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{x_0}}$. Chuỗi Riemann này HT nếu $x_0 > 1$ và PK nếu $x_0 \leq 1$. KL: MHT$= (1, \infty)$.

3. **Chú ý:**

- Tổng của $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ là hàm số $S(x)$ xác định trong miền HT của nó.
- Với mỗi x_0 thuộc miền HT, ta nói chuỗi hàm số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ HT điểm tại x_0, tức là $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N_0 = N_0(\varepsilon, x_0) \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|S_n(x_0) - S(x_0)| < \varepsilon \quad \forall n \geq N_0.$$

II. Chuỗi hàm số HT đều

1. **Định nghĩa:** Chuỗi hàm số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ được gọi là HT đều trên tập $\mathcal{D}$ đến hàm số $S(x)$ nếu $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N_0 = N_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon \quad \forall n \geq N_0 \text{ và } \forall x \in \mathcal{D}.$$

II. Chuỗi hàm số HT đều

1. **Định nghĩa:** Chuỗi hàm số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ được gọi là HT đều trên tập $\mathcal{D}$ đến hàm số $S(x)$ nếu $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N_0 = N_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon \quad \forall n \geq N_0 \text{ và } \forall x \in \mathcal{D}.$$

- Ý nghĩa hình học: Với n đủ lớn, $S_n(x)$ nằm hoàn toàn trong dải $(S(x) - \varepsilon, S(x) + \varepsilon)$, $\forall x \in \mathcal{D}$.

II. Chuỗi hàm số HT đều

1. **Định nghĩa:** Chuỗi hàm số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ được gọi là HT đều trên tập $\mathcal{D}$ đến hàm số $S(x)$ nếu $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N_0 = N_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon \quad \forall n \geq N_0 \text{ và } \forall x \in \mathcal{D}.$$

   - Ý nghĩa hình học: Với n đủ lớn, $S_n(x)$ nằm hoàn toàn trong dải $(S(x) - \varepsilon, S(x) + \varepsilon)$, $\forall x \in \mathcal{D}$.

2. **Tiêu chuẩn đánh giá sự HT đều:**
   - Tiêu chuẩn Cauchy:

   $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ HT đều trên tập $\mathcal{D}$ $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists N_0 = N_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|S_p(x) - S_q(x)| < \varepsilon, \quad \forall p > q \geq N_0 \text{ và } \forall x \in \mathcal{D}.$$

Bài 4: Chuỗi hàm số

- Tiêu chuẩn Weierstrass: Nếu các giả thiết sau thỏa mãn:

  i) $|u_n(x)| \leq a_n, \quad \forall\, n \geq n_0$ và $\forall\, x \in \mathcal{D}$,

  ii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ HT,

  thì $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ HTTĐ và HT đều trên tập $\mathcal{D}$.

- Tiêu chuẩn Weierstrass: Nếu các giả thiết sau thỏa mãn:
  i) $|u_n(x)| \leq a_n, \quad \forall n \geq n_0$ và $\forall x \in \mathcal{D}$,
  ii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ HT,

  thì $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ HTTĐ và HT đều trên tập $\mathcal{D}$.

  Ví dụ: Xét sự HT đều của các chuỗi hàm số sau:

  $a)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos nx}{(n+1)4^n}$. Giải: TXĐ: $\mathbb{R}$. Ta có: $|u_n(x)| = \dfrac{|\cos nx|}{(n+1)4^n} \leq \dfrac{1}{4^n} = a_n, \ \forall n \geq 1$ và $\forall x \in \mathbb{R}$.

  Chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ HT $\left(\text{Chuỗi hình học với } q = \dfrac{1}{4}\right) \Rightarrow$ Chuỗi hàm HT đều trên $\mathbb{R}$.

  $b)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{3^{n+1}} \left(\dfrac{3x+1}{x+2}\right)^n,\ x \in [-1, 1]$. Gợi ý: Xét hàm số $f(x) = \dfrac{3x+1}{x+2}$ trên $[-1, 1]$, ta có $\cdots$

  $-2 \leq f(x) \leq \dfrac{4}{3} \Rightarrow |u_n(x)| \leq \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n = a_n, \forall x \in [-1, 1] \Rightarrow$ Chuỗi hàm HT đều trên $[-1, 1]$.

3. **Tính chất của chuỗi hàm số HT đều:**

- Tính liên tục:

  Nếu i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ HT đều đến hàm số $S(x)$ trên tập $\mathcal{D}$,

  ii) $u_n(x)$ liên tục trên $\mathcal{D}$, $\forall\, n \geq 1$,

  thì $S(x)$ liên tục trên $\mathcal{D}$ và

$$\lim_{x\to x_0} S(x) = \lim_{x\to x_0} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x\to x_0} u_n(x),\ \forall\, x_0 \in \mathcal{D}.$$

3. **Tính chất của chuỗi hàm số HT đều:**

- Tính liên tục:

Nếu i) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ HT đều đến hàm số $S(x)$ trên tập $\mathcal{D}$,

ii) $u_n(x)$ liên tục trên $\mathcal{D}$, $\forall\, n \geq 1$,

thì $S(x)$ liên tục trên $\mathcal{D}$ và

$$\lim_{x\to x_0} S(x) = \lim_{x\to x_0} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x\to x_0} u_n(x),\ \forall\, x_0 \in \mathcal{D}.$$

Ví dụ: Xét tính liên tục của $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \arctan \frac{x}{\sqrt{n+2}}$.

3. **Tính chất của chuỗi hàm số HT đều**:

- Tính liên tục:

Nếu i) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ HT đều đến hàm số $S(x)$ trên tập $\mathcal{D}$,

ii) $u_n(x)$ liên tục trên $\mathcal{D}$, $\forall\, n \geq 1$,

thì $S(x)$ liên tục trên $\mathcal{D}$ và

$$\lim_{x\to x_0} S(x) = \lim_{x\to x_0} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x\to x_0} u_n(x),\ \forall\, x_0 \in \mathcal{D}.$$

Ví dụ: Xét tính liên tục của $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \arctan \frac{x}{\sqrt{n+2}}$.

Giải: Ta có: $|u_n(x)| = \frac{1}{n^2}\left|\arctan \frac{x}{\sqrt{n+2}}\right| \leq \frac{\pi}{2n^2} = a_n,\ \forall\, n \geq 1$ và $\forall\, x \in \mathbb{R}$. Chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ HT $\Rightarrow$ Chuỗi hàm HT đều trên $\mathbb{R}$ (TC Weierstrass). Mà $u_n(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \Rightarrow$ Chuỗi hàm liên tục trên $\mathbb{R}$.

Bài 4: Chuỗi hàm số

- Tính khả tích:

Nếu i) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ HT đều đến hàm số $S(x)$ trên $[a,b]$,

ii) $u_n(x)$ liên tục trên $[a,b]$, $\forall\, n \geq 1$,

thì $S(x)$ khả tích trên $[a,b]$ và $$\int_a^b S(x)dx = \int_a^b \Big(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \Big) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)dx.$$

Bài 4: Chuỗi hàm số

- Tính khả tích:

Nếu i) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ HT đều đến hàm số $S(x)$ trên $[a, b]$,

ii) $u_n(x)$ liên tục trên $[a, b]$, $\forall\, n \geq 1$,

thì $S(x)$ khả tích trên $[a, b]$ và $\displaystyle\int_a^b S(x)dx = \int_a^b \Big(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\Big)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)dx.$

Ví dụ: Xét tính khả tích của $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{(n+1)4^n}$.

- Tính khả tích:

Nếu i) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ HT đều đến hàm số $S(x)$ trên $[a, b]$,

ii) $u_n(x)$ liên tục trên $[a, b]$, $\forall\, n \geq 1$,

thì $S(x)$ khả tích trên $[a, b]$ và $$\int_a^b S(x)dx = \int_a^b \Big(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\Big)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)dx.$$

Ví dụ: Xét tính khả tích của $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos nx}{(n+1)4^n}$.

Giải: Trên mọi đoạn $[a, b] \subset \mathbb{R}$, ta thấy điều kiện i) của tính chất này thỏa mãn (do CM trong ví dụ trước). Hơn nữa, hàm số $u_n(x) = \dfrac{\cos nx}{(n+1)4^n}$ luôn liên tục trên $\mathbb{R}$, nên chuỗi hàm đã cho khả tích trên mọi đoạn $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

Bài 4: Chuỗi hàm số

- Tính khả vi:

Nếu i) $u_n(x)$ khả vi liên tục trên (a, b), $\forall\, n \geq 1$,

ii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ HT tới hàm số $S(x)$ trên (a, b),

iii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ HT đều trên (a, b),

thì $S(x)$ khả vi trên (a, b) và $S'(x) = \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)' = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n'(x).$

- Tính khả vi:

Nếu i) $u_n(x)$ khả vi liên tục trên (a,b), $\forall\, n \geq 1$,

ii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ HT tới hàm số $S(x)$ trên (a,b),

iii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$ HT đều trên (a,b),

thì $S(x)$ khả vi trên (a,b) và $S'(x) = \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)' = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u'_n(x).$

Ví dụ: Xét tính khả vi của $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos nx}{(n+1)4^n}$.

- Tính khả vi:

Nếu i) $u_n(x)$ khả vi liên tục trên (a, b), $\forall\, n \geq 1$,

ii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ HT tới hàm số $S(x)$ trên (a, b),

iii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ HT đều trên (a, b),

thì $S(x)$ khả vi trên (a, b) và $\quad S'(x) = \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)' = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n'(x).$

Ví dụ: Xét tính khả vi của $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos nx}{(n+1)4^n}$.

Giải: Ta thấy đk i) luôn đúng và đk ii) thỏa mãn (do CM trong ví dụ trước) trên $\mathbb{R}$. Hơn nữa,
$u_n'(x) = \dfrac{-n \sin nx}{(n+1)4^n} \Rightarrow |u_n'(x)| \leq \dfrac{n}{(n+1)4^n} \sim \dfrac{1}{4^n} = a_n$ khi $n \to \infty$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Vì $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ HT,
nên $\sum\limits^{\infty} u_n'(x)$ HT đều trên $\mathbb{R}$ (TC Weierstrass) $\Rightarrow$ đk iii) đúng. Chuỗi hàm đã cho khả vi trên $\mathbb{R}$.

Bài 5: CHUỖI LŨY THỪA

Bài 5: Chuỗi lũy thừa

I. Chuỗi lũy thừa và bán kính HT

1. **Định nghĩa:** Chuỗi lũy thừa là một chuỗi hàm số có dạng

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots ,$$

trong đó a_n là các số thực và x là biến số.

I. Chuỗi lũy thừa và bán kính HT

1. **Định nghĩa:** Chuỗi lũy thừa là một chuỗi hàm số có dạng

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots ,$$

trong đó a_n là các số thực và x là biến số.

- **Ví dụ:** Chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ HT nếu $|x| < 1$ và $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, PK nếu $|x| \geq 1$.

Bài 5: Chuỗi lũy thừa

I. Chuỗi lũy thừa và bán kính HT

1. **Định nghĩa:** Chuỗi lũy thừa là một chuỗi hàm số có dạng

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots ,$$

trong đó a_n là các số thực và x là biến số.

- **Ví dụ:** Chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ HT nếu $|x| < 1$ và $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, PK nếu $|x| \geq 1$.

2. **Định lý Abel:**
   - Nếu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ HT tại $x_0 \neq 0$, thì nó HTTĐ tại mọi x với $|x| < |x_0|$.
   - Nếu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ PK tại x_0, thì nó PK tại mọi x với $|x| > |x_0|$.

Bài 5: Chuỗi lũy thừa

I. Chuỗi lũy thừa và bán kính HT

1. **Định nghĩa:** Chuỗi lũy thừa là một chuỗi hàm số có dạng

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots ,$$

trong đó a_n là các số thực và x là biến số.

- **Ví dụ:** Chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ HT nếu $|x| < 1$ và $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, PK nếu $|x| \geq 1$.

2. **Định lý Abel:**
   - Nếu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ HT tại $x_0 \neq 0$, thì nó HTTĐ tại mọi x với $|x| < |x_0|$.
   - Nếu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ PK tại x_0, thì nó PK tại mọi x với $|x| > |x_0|$.

CM: Lấy bất kỳ $x \in \mathbb{R}$ mà $|x| < |x_0|$, ta viết $|a_n x^n| = |a_n x_0^n| \left|\frac{x}{x_0}\right|^n = |a_n x_0^n| q^n$ với $0 \leq q = \left|\frac{x}{x_0}\right| < 1$.

Vì $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ HT, nên $\lim a_n x_0^n = 0$, tức là tồn tại $N_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $|a_n x_0^n| < 1$ với $n \geq N_0$. Khi đó:

$|a_n x^n| \leq q^n$ với $n \geq N_0$. Vì $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$ HT, nên $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ HT (theo TCSS 1) $\Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ HTTĐ.

Bằng cách sử dụng phản chứng và ý thứ nhất ở trên, ta chứng minh được ý còn lại của định lý này.

Bài 5: Chuỗi lũy thừa

$|a_n x^n| \le q^n$ với $n \ge N_0$. Vì $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$ HT, nên $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ HT (theo TCSS 1) $\Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ HTTĐ.

Bằng cách sử dụng phản chứng và ý thứ nhất ở trên, ta chứng minh được ý còn lại của định lý này.

3. **Bán kính HT**:
   - Định nghĩa: Từ định lý Abel, ta khẳng định rằng luôn tồn tại một số R $(0 \le R \le \infty)$ sao cho chuỗi lũy thừa HTTĐ trong $(-R, R)$ và PK trong $(-\infty, -R) \cup (R, \infty)$. Khi đó: Số R đó được gọi là bán kính HT và khoảng $(-R, R)$ được gọi là khoảng HT của chuỗi lũy thừa.

$$|a_n x^n| \le q^n \text{ với } n \ge N_0. \text{ Vì } \sum_{n=0}^{\infty} q^n \text{ HT, nên } \sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n| \text{ HT (theo TCSS 1)} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ HTTĐ.}$$

Bằng cách sử dụng phản chứng và ý thứ nhất ở trên, ta chứng minh được ý còn lại của định lý này.

3. **Bán kính HT**:

- Định nghĩa: Từ định lý Abel, ta khẳng định rằng luôn tồn tại một số R $(0 \le R \le \infty)$ sao cho chuỗi lũy thừa HTTĐ trong $(-R, R)$ và PK trong $(-\infty, -R) \cup (R, \infty)$. Khi đó: Số R đó được gọi là bán kính HT và khoảng $(-R, R)$ được gọi là khoảng HT của chuỗi lũy thừa.
- Cách tính R: Giả sử $\lim \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = L$ hoặc $\lim \sqrt[n]{|a_n|} = L$. Khi đó: Bán kính HT của chuỗi lũy thừa được xác định bởi

$$R = \begin{cases} \dfrac{1}{L} & \text{nếu } 0 < L < \infty, \\ 0 & \text{nếu } L = \infty, \\ \infty & \text{nếu } L = 0. \end{cases}$$

$$|a_n x^n| \leq q^n \text{ với } n \geq N_0. \text{ Vì } \sum_{n=0}^{\infty} q^n \text{ HT, nên } \sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n| \text{ HT (theo TCSS 1)} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ HTTĐ.}$$

Bằng cách sử dụng phản chứng và ý thứ nhất ở trên, ta chứng minh được ý còn lại của định lý này.

3. **Bán kính HT**:

- Định nghĩa: Từ định lý Abel, ta khẳng định rằng luôn tồn tại một số R $(0 \leq R \leq \infty)$ sao cho chuỗi lũy thừa HTTĐ trong $(-R, R)$ và PK trong $(-\infty, -R) \cup (R, \infty)$. Khi đó: Số R đó được gọi là bán kính HT và khoảng $(-R, R)$ được gọi là khoảng HT của chuỗi lũy thừa.
- Cách tính R: Giả sử $\lim \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = L$ hoặc $\lim \sqrt[n]{|a_n|} = L$. Khi đó: Bán kính HT của chuỗi lũy thừa được xác định bởi

$$R = \begin{cases} \dfrac{1}{L} & \text{nếu } 0 < L < \infty, \\ 0 & \text{nếu } L = \infty, \\ \infty & \text{nếu } L = 0. \end{cases}$$

- **Chú ý:** Chuỗi lũy thừa có thể HT tại 2 đầu mút $\pm R$, nên khi tìm miền HT của lũy thừa ta cần xét thêm tại 2 giá trị đầu mút này.

Bài 5: Chuỗi lũy thừa

Ví dụ: Tìm bán kính HT, khoảng HT và miền HT của chuỗi hàm sau:

$$a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)3^n}x^n \qquad b)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+2}{2n+1}\right)^n(x+1)^n.$$

Bài 5: Chuỗi lũy thừa

Ví dụ: Tìm bán kính HT, khoảng HT và miền HT của chuỗi hàm sau:

$$a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)3^n}x^n \qquad b)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+2}{2n+1}\right)^n(x+1)^n.$$

Giải:

$a)$ Ta có $a_n=\dfrac{1}{(n+2)3^n}\Rightarrow a_{n+1}=\dfrac{1}{(n+3)3^{n+1}}\Rightarrow L=\lim\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\dfrac{n+2}{3(n+3)}=\dfrac{1}{3}$. Khi đó:

- Bán kính HT là $R=3$ và khoảng HT là $x\in(-3,3)$.
- Tại $x=-3$ thì chuỗi trở thành $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+2}$ và HT theo TC Leibniz. Tại $x=3$ thì chuỗi trở thành $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+2}$ và PK theo TCSS. Do đó, miền HT là $x\in[-3,3)$.

Ví dụ: Tìm bán kính HT, khoảng HT và miền HT của chuỗi hàm sau:

$a) \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)3^n} x^n \qquad b) \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{2n+1}\right)^n (x+1)^n.$

Giải:

$a)$ Ta có $a_n = \frac{1}{(n+2)3^n} \Rightarrow a_{n+1} = \frac{1}{(n+3)3^{n+1}} \Rightarrow L = \lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim \frac{n+2}{3(n+3)} = \frac{1}{3}$. Khi đó:

- Bán kính HT là $R = 3$ và khoảng HT là $x \in (-3, 3)$.
- Tại $x = -3$ thì chuỗi trở thành $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+2}$ và HT theo TC Leibniz. Tại $x = 3$ thì chuỗi trở thành $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+2}$ và PK theo TCSS. Do đó, miền HT là $x \in [-3, 3)$.

$b)$ Đặt $X = x + 1$. Ta có $a_n = \left(\frac{n+2}{2n+1}\right)^n \Rightarrow L = \lim \sqrt[n]{|a_n|} = \lim \frac{n+2}{2n+1} = \frac{1}{2}$. Khi đó:

- Bán kính HT là $R = 2$, khoảng HT là $X \in (-2, 2) \Leftrightarrow x \in (-3, 1)$.
- Tại $x = -3$ hoặc $x = 1$ thì $\lim |a_n| = e^{\frac{3}{2}} \neq 0 \Rightarrow \lim a_n \neq 0 \Rightarrow$ chuỗi thu được PK.
- Do đó, miền HT là $x \in (-3, 1)$.

II. Các tính chất của chuỗi lũy thừa

Giả sử $R > 0$ là bán kính HT của chuỗi lũy thừa $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ và đặt

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ với } |x| < R.$$

Khi đó:

- Tính HT đều: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ HT đều trên mọi đoạn $[a, b] \subset (-R, R)$.

II. Các tính chất của chuỗi lũy thừa

Giả sử $R > 0$ là bán kính HT của chuỗi lũy thừa $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ và đặt

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ với } |x| < R.$$

Khi đó:

- Tính HT đều: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ HT đều trên mọi đoạn $[a, b] \subset (-R, R)$.
- Tính liên tục: $S(x)$ liên tục trên $(-R, R)$.
- Tính khả tích: $S(x)$ khả tích trên mọi đoạn $[a, b] \subset (-R, R)$ và
$$\int_a^b S(x)dx = \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b a_n x^n dx.$$
- Tính khả vi: $S(x)$ khả vi trên $(-R, R)$ và $S'(x) = \left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n x^n)'$.

Ví dụ: Xác định bán kính HT và tính tổng của chuỗi hàm sau:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(x+2)^n \qquad b) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}(n+1)(x-1)^n.$$

Bài 5: Chuỗi lũy thừa

Ví dụ: Xác định bán kính HT và tính tổng của chuỗi hàm sau:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(x+2)^n \qquad b) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}(n+1)(x-1)^n.$$

Giải: b) • Bán kính HT: $R = 1$. Chuỗi luôn HT với $|x-1| < 1$, tức là $0 < x < 2$.

• Đặt $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}(n+1)(x-1)^n$. Lấy tích phân 2 vế trên $[1, x]$ ta có

$$\int_1^x S(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \int_1^x (n+1)(t-1)^n dt = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}(x-1)^{n+1}$$

$$= (1-x)^2 + (1-x)^3 + \cdots = \frac{1}{1-(1-x)} - 1 - (1-x) = \frac{1}{x} + x - 2.$$

KL: $S(x) = \left(\frac{1}{x} + x - 2\right)' = 1 - \frac{1}{x^2}$ với $x \in (0, 2)$.

I. Khai triển hàm số thành chuỗi lũy thừa

1. **Định nghĩa:**

- Cho hàm số $f(x)$ trên X, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ được gọi là chuỗi Taylor của hàm số $f(x)$ trong lân cận của $x_0 \in X$. Nếu $x_0 = 0$, thì $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ được gọi là chuỗi Maclaurin của hàm số $f(x)$.

I. Khai triển hàm số thành chuỗi lũy thừa

1. **Định nghĩa:**

- Cho hàm số $f(x)$ trên X, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ được gọi là chuỗi Taylor của hàm số $f(x)$ trong lân cận của $x_0 \in X$. Nếu $x_0 = 0$, thì $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ được gọi là chuỗi Maclaurin của hàm số $f(x)$.
- Nếu $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = f(x)$, thì ta nói hàm số $f(x)$ được khai triển thành chuỗi Taylor trong lân cận của x_0.

Bài 5: Chuỗi lũy thừa

2. **Điều kiện để một hàm số khai triển được thành chuỗi Taylor:**

Một hàm số $f(x)$ luôn khai triển được thành chuỗi Taylor trong lân cận của x_0 nếu thỏa mãn một trong các điều kiện sau đây:

- Điều kiện 1: $f(x)$ có đạo hàm mọi cấp trong lân cận nào đó của x_0 sao cho $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, trong đó
$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \quad \text{với } c \in (x_0, x).$$
- Điều kiện 2: $f(x)$ có đạo hàm mọi cấp trong lân cận nào đó của x_0 sao cho tồn tại hằng số $M > 0$ để
$$\left|f^{(n)}(c)\right| \le M, \quad \forall c \text{ thuộc lân cận đó của } x_0.$$

2. **Điều kiện để một hàm số khai triển được thành chuỗi Taylor:**

Một hàm số $f(x)$ luôn khai triển được thành chuỗi Taylor trong lân cận của x_0 nếu thỏa mãn một trong các điều kiện sau đây:

- Điều kiện 1: $f(x)$ có đạo hàm mọi cấp trong lân cận nào đó của x_0 sao cho $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, trong đó
$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \quad \text{với } c \in (x_0, x).$$
- Điều kiện 2: $f(x)$ có đạo hàm mọi cấp trong lân cận nào đó của x_0 sao cho tồn tại hằng số $M > 0$ để
$$\left|f^{(n)}(c)\right| \le M, \quad \forall c \text{ thuộc lân cận đó của } x_0.$$

Ví dụ: Xét hàm số $f(x) = e^x$, ta có $f'(x) = f''(x) = \cdots = f^{(n)}(x) = e^x$. Khi đó:
$$|f^{(n)}(c)| = e^c \le e^{x_0+1} = M \text{ vì } c \in (x_0, x), \text{ tức là } c < x < x_0 + 1.$$

KL: Hàm $f(x) = e^x$ khai triển được thành chuỗi Taylor (theo Điều kiện 2).

Chú ý: Khai triển Maclaurin của một số hàm số sơ cấp sau đây:

- $\dfrac{1}{1-x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ và $\dfrac{1}{1+x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$ $(R = 1)$.
- $(1+x)^\alpha = 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n, \forall \alpha \in \mathbb{R}$ $(R = 1)$.
- $e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{n!} x^n$ $(R = \infty)$.
- $\sin x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} x^{2n-1}$ và $\cos x = 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$ $(R = \infty)$.
- $\ln(1+x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$ và $\arctan x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n-1}$ $(R = 1)$.

Bài 5: Chuỗi lũy thừa

Ví dụ: Khai triển các hàm số sau đây thành chuỗi lũy thừa:

$$a)\ f(x) = \frac{1-x}{1+x} \qquad b)\ f(x) = x\cos^2 x \qquad c)\ f(x) = \ln(3+x).$$

Ví dụ: Khai triển các hàm số sau đây thành chuỗi lũy thừa:

$$a)\ f(x) = \frac{1-x}{1+x} \qquad b)\ f(x) = x\cos^2 x \qquad c)\ f(x) = \ln(3+x).$$

Giải: a) $f(x) = -1 + \dfrac{2}{1+x} = -1 + 2\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^n$ với $x \in (-1,1)$.

b) $f(x) = x.\dfrac{1+\cos 2x}{2} = \dfrac{x}{2} + \dfrac{x}{2}.\cos 2x = \dfrac{x}{2} + \dfrac{x}{2}\left(1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(2x)^{2n}\right)$

$= x + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n+1}$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

c) $f(x) = \ln 3\left(1 + \dfrac{x}{3}\right) = \ln 3 + \ln\left(1 + \dfrac{x}{3}\right) = \ln 3 + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n.3^n}x^n$ với $x \in (-3,3)$.

Bài 6: CHUỖI FOURIER

Bài 6: Chuỗi Fourier

I. Chuỗi lượng giác và chuỗi Fourier

1. Chuỗi lượng giác

- **Định nghĩa:** Chuỗi lượng giác là một chuỗi hàm số có dạng

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos nx + b_n \sin nx \right),$$

trong đó a_0, a_n, b_n với $n \geq 1$ là các số thực và x là biến số.

I. Chuỗi lượng giác và chuỗi Fourier

1. Chuỗi lượng giác

- **Định nghĩa:** Chuỗi lượng giác là một chuỗi hàm số có dạng

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

trong đó a_0, a_n, b_n với $n \geq 1$ là các số thực và x là biến số.

- **Chú ý:**

i) Theo TC Weierstrass: Nếu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ và $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |b_n|$ HT, thì chuỗi lượng giác HTTĐ và HT đều trên $\mathbb{R}$.

Thật vậy: $|u_n(x)| = |a_n \cos nx + b_n \sin nx|$

$\leq |a_n \cos nx| + |b_n \sin nx| \leq |a_n| + |b_n| =: c_n$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

I. Chuỗi lượng giác và chuỗi Fourier

1. Chuỗi lượng giác

- **Định nghĩa:** Chuỗi lượng giác là một chuỗi hàm số có dạng

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

trong đó a_0, a_n, b_n với $n \geq 1$ là các số thực và x là biến số.

- **Chú ý:**

i) Theo TC Weierstrass: Nếu $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ và $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ HT, thì chuỗi lượng giác HTTĐ và HT đều trên $\mathbb{R}$.

Thật vậy: $|u_n(x)| = |a_n \cos nx + b_n \sin nx|$

$$\leq |a_n \cos nx| + |b_n \sin nx| \leq |a_n| + |b_n| =: c_n \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}.$$

ii) Tuy nhiên, nếu chuỗi lượng giác HT, thì chưa kết luận được $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ và $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ HT.

2. **Chuỗi Fourier**

- **Định lý:** Nếu hàm số $f(x)$ tuần hoàn chu kì 2π và được biểu diễn thành chuỗi lượng giác
$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$
thì các hệ số của chuỗi được tính bởi công thức sau:
$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx,$$
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx,$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx.$$

2. **Chuỗi Fourier**

- **Định lý:** Nếu hàm số $f(x)$ tuần hoàn chu kì 2π và được biểu diễn thành chuỗi lượng giác

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right),$$

thì các hệ số của chuỗi được tính bởi công thức sau:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\, dx,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\, dx.$$

C/M: Với mọi $p, q \in \mathbb{N}^*$, các tích phân sau luôn đúng:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos px\, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin px\, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin px \cos qx\, dx = 0,$$

và
$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos px \cos qx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin px \sin qx \, dx = \begin{cases} 0 & \text{nếu } p \neq q, \\ \pi & \text{nếu } p = q. \end{cases}$$

và $$\int_{-\pi}^{\pi} \cos px \cos qx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin px \sin qx \, dx = \begin{cases} 0 & \text{nếu } p \neq q, \\ \pi & \text{nếu } p = q. \end{cases}$$

- $a_0, a_n =?$ Lấy tích phân 2 vế ta có:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}.\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} 1.dx + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx dx + b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx dx\right)$$
$$= a_0.$$
$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{1}{\pi}.\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx dx$$
$$+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx \cos nx dx + b_k\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx \cos nx dx\right)$$
$$= a_n.$$

- $b_n =?$ Tương tự.

Bài 6: Chuỗi Fourier

- **Định nghĩa 1:** Chuỗi Fourier của hàm số $f(x)$ là chuỗi lượng giác
$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$
trong đó a_0, a_n, b_n với $n \geq 1$ được xác định bởi công thức như sau:
$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx,$$
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \quad \text{và} \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx.$$

Bài 6: Chuỗi Fourier

- **Định nghĩa 1:** Chuỗi Fourier của hàm số $f(x)$ là chuỗi lượng giác
$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$
trong đó a_0, a_n, b_n với $n \geq 1$ được xác định bởi công thức như sau:
$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx,$$
$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\, dx \quad \text{và} \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\, dx.$$

- **Chú ý:**
  i) Nói chung, chuỗi Fourier của hàm số $f(x)$ có thể HT hoặc PK.
  ii) Trong trường hợp chuỗi Fourier của hàm số $f(x)$ HT, thì nó cũng chưa chắc HT về hàm số $f(x)$.

Bài 6: Chuỗi Fourier

- **Định nghĩa 1:** Chuỗi Fourier của hàm số $f(x)$ là chuỗi lượng giác
$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right),$$
trong đó a_0, a_n, b_n với $n \geq 1$ được xác định bởi công thức như sau:
$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx,$$
$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \quad \text{và} \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx.$$

- **Chú ý:**
  - i) Nói chung, chuỗi Fourier của hàm số $f(x)$ có thể HT hoặc PK.
  - ii) Trong trường hợp chuỗi Fourier của hàm số $f(x)$ HT, thì nó cũng chưa chắc HT về hàm số $f(x)$.
- **Định nghĩa 2:** Nếu chuỗi Fourier của hàm số $f(x)$ HT về hàm số $f(x)$ thì ta nói hàm số $f(x)$ được khai triển thành chuỗi Fourier.

3. ĐK để hàm số khai triển được thành chuỗi Fourier

- **Định lý Dirichlet:** Nếu hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn:
  - i) Tuần hoàn chu kì 2π,
  - ii) Đơn điệu từng khúc trên $[-\pi, \pi]$,
  - iii) Bị chặn trên $[-\pi, \pi]$,

thì chuỗi Fourier của nó HT về hàm số $S(x)$ tại mọi điểm trên $[-\pi, \pi]$ và

$$S(x) = \begin{cases} f(x) & \text{nếu } x \text{ là điểm liên tục của } f(x), \\ \dfrac{\lim\limits_{t \to x^+} f(t) + \lim\limits_{t \to x^-} f(t)}{2} & \text{nếu } x \text{ là điểm gián đoạn của } f(x). \end{cases}$$

3. ĐK để hàm số khai triển được thành chuỗi Fourier

- **Định lý Dirichlet:** Nếu hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn:
  - i) Tuần hoàn chu kì 2π,
  - ii) Đơn điệu từng khúc trên $[-\pi, \pi]$,
  - iii) Bị chặn trên $[-\pi, \pi]$,

thì chuỗi Fourier của nó HT về hàm số $S(x)$ tại mọi điểm trên $[-\pi, \pi]$ và

$$S(x) = \begin{cases} f(x) & \text{nếu } x \text{ là điểm liên tục của } f(x), \\ \dfrac{\lim\limits_{t \to x^+} f(t) + \lim\limits_{t \to x^-} f(t)}{2} & \text{nếu } x \text{ là điểm gián đoạn của } f(x). \end{cases}$$

- **Ví dụ:** Khai triển thành chuỗi Fourier hàm số $f(x)$ tuần hoàn chu kì 2π, xác định như sau:

a) $f(x) = x^2, \ -\pi < x < \pi.$ b) $f(x) = \begin{cases} -x & \text{nếu } -\pi < x < 0, \\ 1 & \text{nếu } 0 \le x \le \pi. \end{cases}$

Bài 6: Chuỗi Fourier

Giải: a) Dễ thấy: Các đk i)+ii)+iii) thỏa mãn. Ta có:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{1}{3\pi}x^3\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{2}{3}\pi^2.$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos nx\, dx \overset{\text{(TP từng phần 2 lần)}}{=} \frac{4(-1)^n}{n^2} \quad \text{(chú ý } \cos n\pi = (-1)^n\text{)}.$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin nx\, dx = \cdots = 0.$$

KL: $f(x) = \frac{1}{3}\pi^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2}\cos nx.$

II. Khai triển Fourier của một số hàm số thường gặp

1. **Hàm số chẵn, lẻ tuần hoàn chu kì 2π**

- **Định lý:**

  i) Nếu $f(x)$ là hàm chẵn thì $a_0 = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\,dx$, $a_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$ và $b_n = 0$.

  ii) Nếu $f(x)$ là hàm lẻ thì $a_0 = 0$, $a_n = 0$ và $b_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$.

II. Khai triển Fourier của một số hàm số thường gặp

1. **Hàm số chẵn, lẻ tuần hoàn chu kì 2π**

- **Định lý:**

i) Nếu $f(x)$ là hàm chẵn thì $a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\,dx$, $a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos nx\,dx$ và $b_n = 0$.

ii) Nếu $f(x)$ là hàm lẻ thì $a_0 = 0$, $a_n = 0$ và $b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin nx\,dx$.

C/M: i) Hàm chẵn $f(-x) = f(x)$, ta có:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x)\cos nx\,dx + \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos nx\,dx,$$

$$\overset{\text{(Đặt x=-t)}}{=} \quad -\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{0} f(-t)\cos(-nt)\,dt + \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos nx\,dx,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x)\sin nx\,dx + \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin nx\,dx = 0.$$

ii) Tương tự.

Bài 6: Chuỗi Fourier

- **Ví dụ:** Khai triển thành chuỗi Fourier các hàm số tuần hoàn chu kì 2π sau đây:
  a) $f(x) = |x|, -\pi < x \leq \pi.$ b) $f(x) = x, -\pi \leq x < \pi$

Bài 6: Chuỗi Fourier

- **Ví dụ:** Khai triển thành chuỗi Fourier các hàm số tuần hoàn chu kì 2π sau đây:
  a) $f(x) = |x|,\ -\pi < x \leq \pi.$ b) $f(x) = x,\ -\pi \leq x < \pi$

  Giải: a) Vì hàm số là hàm chẵn, nên $b_n = 0$ và

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\,dx = \pi,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos nx\,dx = \frac{2}{n^2\pi}\big((-1)^n - 1\big).$$

  KL: $f(x) = \dfrac{\pi}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2\pi}\big((-1)^n - 1\big)\cos nx.$

  b) Vì hàm số là hàm lẻ, nên $a_0 = 0,\ a_n = 0$ và

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\sin nx\,dx = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}.$$

  KL: $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n}\sin nx.$

2. **Hàm số tuần hoàn chu kì $2T$ bất kì**

- **Định lý:** Nếu hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn:
  i) Tuần hoàn chu kì $2T$,
  ii) Đơn điệu từng khúc trên $[-T, T]$,
  iii) Bị chặn trên $[-T, T]$,

  thì khai triển Fourier của nó có dạng

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{T} + b_n \sin \frac{n\pi x}{T} \right),$$

  trong đó

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T}^{T} f(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{T} \int_{-T}^{T} f(x) \cos \frac{n\pi x}{T} dx, \quad b_n = \frac{1}{T} \int_{-T}^{T} f(x) \sin \frac{n\pi x}{T} dx.$$

Bài 6: Chuỗi Fourier

2. **Hàm số tuần hoàn chu kì $2T$ bất kì**

- **Định lý:** Nếu hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn:
  i) Tuần hoàn chu kì $2T$,
  ii) Đơn điệu từng khúc trên $[-T, T]$,
  iii) Bị chặn trên $[-T, T]$,

  thì khai triển Fourier của nó có dạng

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{T} + b_n \sin \frac{n\pi x}{T} \right),$$

  trong đó

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T}^{T} f(x)dx, \quad a_n = \frac{1}{T} \int_{-T}^{T} f(x) \cos \frac{n\pi x}{T}\, dx, \quad b_n = \frac{1}{T} \int_{-T}^{T} f(x) \sin \frac{n\pi x}{T}\, dx.$$

C/M: Đặt $z = \dfrac{\pi x}{T}$, tức là $x = \dfrac{Tz}{\pi}$. Khi đó: $f(x) = f\left(\dfrac{Tz}{\pi}\right) = g(z) \Rightarrow g$ là hàm tuần hoàn chu kì 2π, đơn điệu từng khúc trên $[-\pi, \pi]$ và bị chặn trên $[-\pi, \pi]$.

Bài 6: Chuỗi Fourier

Ta có: $g(z) = \dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nz + b_n \sin nz)$, trong đó

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(z)dz = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(x)dx,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(z)\cos nz\, dz = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(x)\cos\frac{n\pi x}{T}\, dx,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(z)\sin nz\, dz = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(x)\sin\frac{n\pi x}{T}\, dx.$$

Bài 6: Chuỗi Fourier

Ta có: $g(z) = \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nz + b_n \sin nz)$, trong đó

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(z)dz = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(x)dx,\\
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(z)\cos nz\,dz = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(x)\cos\frac{n\pi x}{T}\,dx,\\
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(z)\sin nz\,dz = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(x)\sin\frac{n\pi x}{T}\,dx.
\end{aligned}$$

- **Ví dụ:** Khai triển thành chuỗi Fourier các hàm số sau đây:
  - a) $f(x) = x^2$ với $-1 \le x \le 1$, tuần hoàn chu kì 2.
  - b) $f(x) = x$ với $-2 \le x < 2$, tuần hoàn chu kì 4.

Đáp án: a) $f(x) = \dfrac{1}{3} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{4(-1)^n}{n^2\pi^2}\cos n\pi x$ b) $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{4(-1)^{n+1}}{n\pi}\sin\dfrac{n\pi x}{2}$.

Bài 6: Chuỗi Fourier

3. **Hàm số bất kì trên đoạn** $[a, b]$

Cho hàm số $f(x)$ đơn điệu từng khúc và bị chặn trên $[a, b]$. Muốn khai triển $f(x)$ thành chuỗi Fourier, ta thực hiện như sau:

- **B1:** Xây dựng hàm số $g(x)$ tuần hoàn chu kì $2T \geq b - a$ sao cho $g(x) = f(x)$ trên $[a, b]$,
- **B2:** Khai triển hàm số $g(x)$ thành chuỗi Fourier.

3. **Hàm số bất kì trên đoạn** $[a, b]$

Cho hàm số $f(x)$ đơn điệu từng khúc và bị chặn trên $[a, b]$. Muốn khai triển $f(x)$ thành chuỗi Fourier, ta thực hiện như sau:

- **B1:** Xây dựng hàm số $g(x)$ tuần hoàn chu kì $2T \geq b - a$ sao cho $g(x) = f(x)$ trên $[a, b]$,
- **B2:** Khai triển hàm số $g(x)$ thành chuỗi Fourier.

Khi đó: Tổng của chuỗi Fourier của hàm số $g(x)$ tại mọi $x \in [a, b]$ bằng hàm số $f(x)$, có thể trừ đi những điểm gián đoạn của $f(x)$.

3. **Hàm số bất kì trên đoạn $[a, b]$**

Cho hàm số $f(x)$ đơn điệu từng khúc và bị chặn trên $[a, b]$. Muốn khai triển $f(x)$ thành chuỗi Fourier, ta thực hiện như sau:

- **B1:** Xây dựng hàm số $g(x)$ tuần hoàn chu kì $2T \geq b - a$ sao cho $g(x) = f(x)$ trên $[a, b]$,
- **B2:** Khai triển hàm số $g(x)$ thành chuỗi Fourier.

Khi đó: Tổng của chuỗi Fourier của hàm số $g(x)$ tại mọi $x \in [a, b]$ bằng hàm số $f(x)$, có thể trừ đi những điểm gián đoạn của $f(x)$.

- **Chú ý:** Vì ta có nhiều cách xây dựng hàm số $g(x)$, nên có nhiều chuỗi Fourier biểu diễn cho cùng một hàm số $f(x)$. Nếu $g(x)$ là hàm chẵn, thì chuỗi Fourier chỉ gồm những hàm số cos (Fourier cos). Nếu $g(x)$ là hàm lẻ, thì chuỗi Fourier chỉ gồm những hàm số sin (Fourier sin).

3. **Hàm số bất kì trên đoạn $[a, b]$**

Cho hàm số $f(x)$ đơn điệu từng khúc và bị chặn trên $[a, b]$. Muốn khai triển $f(x)$ thành chuỗi Fourier, ta thực hiện như sau:

- **B1:** Xây dựng hàm số $g(x)$ tuần hoàn chu kì $2T \geq b - a$ sao cho $g(x) = f(x)$ trên $[a, b]$,
- **B2:** Khai triển hàm số $g(x)$ thành chuỗi Fourier.

Khi đó: Tổng của chuỗi Fourier của hàm số $g(x)$ tại mọi $x \in [a, b]$ bằng hàm số $f(x)$, có thể trừ đi những điểm gián đoạn của $f(x)$.

- **Chú ý:** Vì ta có nhiều cách xây dựng hàm số $g(x)$, nên có nhiều chuỗi Fourier biểu diễn cho cùng một hàm số $f(x)$. Nếu $g(x)$ là hàm chẵn, thì chuỗi Fourier chỉ gồm những hàm số cos (Fourier cos). Nếu $g(x)$ là hàm lẻ, thì chuỗi Fourier chỉ gồm những hàm số sin (Fourier sin).
- **Ví dụ:** Khai triển các hàm số sau thành chuỗi Fourier:

  a) $f(x) = \dfrac{x}{2}$ với $0 \leq x \leq 2$. b) $f(x) = 2x$ với $0 \leq x \leq 1$.

Bài 6: Chuỗi Fourier

Giải: a) Mở rộng hàm số $f(x)$ thành hàm số $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tuần hoàn chu kì $2T=4$ (có vẽ đồ thị kèm theo) và nó là hàm chẵn. Ta có: $g(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\dfrac{n\pi x}{T}+b_n\sin\dfrac{n\pi x}{T}\right)$,

trong đó

$$a_0=\frac{1}{T}\int_{-T}^{T}g(x)dx=\int_0^2\frac{x}{2}dx=1,$$

$$a_n=\frac{1}{T}\int_{-T}^{T}g(x)\cos\frac{n\pi x}{T}\,dx=\int_0^2\frac{x}{2}\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx=\frac{2}{n^2\pi^2}\left((-1)^n-1\right),$$

$$b_n=\frac{1}{T}\int_{-T}^{T}g(x)\sin\frac{n\pi x}{T}\,dx=0.$$

KL: $f(x)=\dfrac{1}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2}{n^2\pi^2}\left((-1)^n-1\right)\cos\dfrac{n\pi x}{2}$ với $x\in[0,2]$.

The end

Chúc các em học tốt!