Chương 3: PHƯƠNG PHÁP BIẾN ĐỔI LAPLACE

BỘ MÔN TOÁN CƠ BẢN

VIỆN TOÁN ỨNG DỤNG VÀ TIN HỌC

ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI

SAMI (HUST) – version 2023

Chương 3: PHƯƠNG PHÁP BIẾN ĐỔI LAPLACE

Bài 1: PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE VÀ BIẾN ĐỔI NGƯỢC

I. Phép biến đổi Laplace

1. **Định nghĩa:** Cho f là hàm xác định trên $[0, \infty)$ và liên tục từng khúc trên mỗi đoạn hữu hạn. Nếu tích phân suy rộng

$$\int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt \text{ với } s \in D \subset \mathbb{R}$$

hội tụ thì ta đặt

$$F(s) := \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt, \text{ trong đó } s \in D$$

và gọi hàm F là biến đổi Laplace của hàm f. Ký hiệu: $F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}(s)$.

Ví dụ: $a)\ f(t) = 1$ $\quad b)\ f(t) = e^{at},\ a \in \mathbb{R}$ $\quad c)\ f(t) = t^a,\ a > -1$
$d)\ f(t) = t^n$ $\quad e)\ f(t) = \cos kt$ $\quad f)\ f(t) = \sin kt.$

I. Phép biến đổi Laplace

1. **Định nghĩa:** Cho f là hàm xác định trên $[0,\infty)$ và liên tục từng khúc trên mỗi đoạn hữu hạn. Nếu tích phân suy rộng

$$\int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt \text{ với } s \in D \subset \mathbb{R}$$

hội tụ thì ta đặt

$$F(s) := \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt, \text{ trong đó } s \in D$$

và gọi hàm F là biến đổi Laplace của hàm f. Ký hiệu: $F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}(s)$.

Ví dụ: $a)\ f(t) = 1$ $\quad b)\ f(t) = e^{at},\ a \in \mathbb{R}$ $\quad c)\ f(t) = t^a,\ a > -1$

$d)\ f(t) = t^n$ $\quad e)\ f(t) = \cos kt$ $\quad f)\ f(t) = \sin kt.$

Giải: a) $F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st}dt = -\frac{e^{-st}}{s}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s}\left(1 - \lim\limits_{A\to\infty} e^{-sA}\right) = \frac{1}{s}$ nếu $s > 0$. Không tồn tại $F(s)$ khi $s \le 0$.

b) $F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st}e^{at}dt = \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t}dt = -\frac{e^{-(s-a)t}}{s-a}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s-a}$ nếu $s > a$. Không tồn tại $F(s)$ khi $s \le a$.

c) $F(s)=\int_0^{\infty} e^{-st}t^a dt$. Đặt $z=st \Rightarrow t=\dfrac{z}{s} \Rightarrow dt=\dfrac{1}{s}dz$.

Xét $s>0$, ta có: $F(s)=\dfrac{1}{s^{a+1}}\int_0^{\infty} e^{-z}z^a dz=\dfrac{1}{s^{a+1}}.\Gamma(a+1)$, trong đó $\Gamma(\alpha):=\int_0^{\infty} e^{-z}z^{\alpha-1}dz$ được gọi là hàm Gamma.

c) $F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} t^a dt$. Đặt $z = st \Rightarrow t = \frac{z}{s} \Rightarrow dt = \frac{1}{s} dz$.

Xét $s > 0$, ta có: $F(s) = \frac{1}{s^{a+1}} \int_0^{\infty} e^{-z} z^a dz = \frac{1}{s^{a+1}} . \Gamma(a+1)$, trong đó $\Gamma(\alpha) := \int_0^{\infty} e^{-z} z^{\alpha-1} dz$ được gọi là hàm Gamma.

d) Thay $a = n$ trong câu c) ta có: $F(s) = \frac{1}{s^{n+1}} . \Gamma(n+1)$, trong đó $\Gamma(n+1) := \int_0^{\infty} e^{-z} z^n dz$. Thực hiện tích phân từng phân n lần cho hàm Gamma, ta được $\Gamma(n+1) = n! \Rightarrow F(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$ với $s > 0$.

c) $F(s) = \int_0^\infty e^{-st} t^a dt$. Đặt $z = st \Rightarrow t = \frac{z}{s} \Rightarrow dt = \frac{1}{s} dz$.

Xét $s > 0$, ta có: $F(s) = \frac{1}{s^{a+1}} \int_0^\infty e^{-z} z^a dz = \frac{1}{s^{a+1}} . \Gamma(a+1)$, trong đó $\Gamma(\alpha) := \int_0^\infty e^{-z} z^{\alpha-1} dz$ được gọi là hàm Gamma.

d) Thay $a = n$ trong câu c) ta có: $F(s) = \frac{1}{s^{n+1}} . \Gamma(n+1)$, trong đó $\Gamma(n+1) := \int_0^\infty e^{-z} z^n dz$. Thực hiện tích phân từng phần n lần cho hàm Gamma, ta được $\Gamma(n+1) = n! \Rightarrow F(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$ với $s > 0$.

e) $F(s) = \int_0^\infty e^{-st} \cos kt dt$. Thực hiện tích phân từng phần 2 lần ta có:

$$F(s) = \frac{1}{s} - \frac{k^2}{s^2} F(s) \Rightarrow \left(1 + \frac{k^2}{s^2}\right) F(s) = \frac{1}{s} \Rightarrow F(s) = \frac{s}{s^2 + k^2} \text{ với } s > 0.$$

f) $F(s) = \int_0^\infty e^{-st} \sin kt dt$. Thực hiện tích phân từng phần 2 lần ta có:

$$F(s) = \frac{k}{s^2} - \frac{k^2}{s^2} F(s) \Rightarrow \left(1 + \frac{k^2}{s^2}\right) F(s) = \frac{k}{s^2} \Rightarrow F(s) = \frac{k}{s^2 + k^2} \text{ với } s > 0.$$

Bài 1: Phép biến đổi Laplace và biến đổi ngược

2. **Tính chất tuyến tính:** Cho 2 hàm số $f(t)$ và $g(t)$. Nếu tồn tại $\mathscr{L}\{f(t)\}$ và $\mathscr{L}\{g(t)\}$, thì với mọi hằng số $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ta luôn có:

$$\mathscr{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\}(s) = \alpha \mathscr{L}\{f(t)\}(s) + \beta \mathscr{L}\{g(t)\}(s).$$

2. **Tính chất tuyến tính:** Cho 2 hàm số $f(t)$ và $g(t)$. Nếu tồn tại $\mathscr{L}\{f(t)\}$ và $\mathscr{L}\{g(t)\}$, thì với mọi hằng số $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ta luôn có:

$$\mathscr{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\}(s) = \alpha \mathscr{L}\{f(t)\}(s) + \beta \mathscr{L}\{g(t)\}(s).$$

C/M:

$$\mathscr{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\}(s) = \int_0^\infty e^{-st}\big(\alpha f(t) + \beta g(t)\big)dt = \lim_{A\to\infty}\int_0^A e^{-st}\big(\alpha f(t) + \beta g(t)\big)dt. \quad (*)$$

Vì $\mathscr{L}\{f(t)\}(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$ và $\mathscr{L}\{g(t)\}(s) = \int_0^\infty e^{-st} g(t)dt$ tồn tại, nên tồn tại

$$\lim_{A\to\infty}\int_0^A e^{-st} f(t)dt \quad \text{và} \quad \lim_{A\to\infty}\int_0^A e^{-st} g(t)dt.$$

Khi đó: VP$(*)$ $= \alpha \lim_{A\to\infty}\int_0^A e^{-st} f(t)dt + \beta \lim_{A\to\infty}\int_0^A e^{-st} g(t)dt$
$= \alpha \mathscr{L}\{f(t)\}(s) + \beta \mathscr{L}\{g(t)\}(s) \Rightarrow$ đpcm.

Ví dụ: $a)\ \mathscr{L}\{3t^2+4t^3\}$ $\quad b)\ \mathscr{L}\{3e^{2t}+2\sin^2 3t\}$

$c)\ \mathscr{L}\{\cosh kt\}$ $\quad d)\ \mathscr{L}\{\sinh kt\}$

Chú ý: Hai hàm số hyperbolic được xác định bởi công thức

$$\cosh x = \frac{e^x+e^{-x}}{2} \quad \text{và} \quad \sinh x = \frac{e^x-e^{-x}}{2}.$$

Ví dụ: $a)\ \mathscr{L}\{3t^2+4t^3\}$ $\quad b)\ \mathscr{L}\{3e^{2t}+2\sin^2 3t\}$

$c)\ \mathscr{L}\{\cosh kt\}$ $\quad d)\ \mathscr{L}\{\sinh kt\}$

Chú ý: Hai hàm số hyperbolic được xác định bởi công thức

$$\cosh x = \frac{e^x+e^{-x}}{2} \quad \text{và} \quad \sinh x = \frac{e^x-e^{-x}}{2}.$$

Giải: Ta có

a) $\mathscr{L}\{3t^2+4t^3\} = 3\mathscr{L}\{t^2\}+4\mathscr{L}\{t^3\} = 3\frac{2!}{s^3}+4\frac{3!}{s^4} = \frac{6s+24}{s^4}$ với $s>0$.

b) $\mathscr{L}\{3e^{2t}+2\sin^2 3t\} = 3\mathscr{L}\{e^{2t}\}+\mathscr{L}\{1\}-\mathscr{L}\{\cos 6t\}$

$$= \frac{3}{s-2}+\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+36} \text{ với } s>2.$$

c) $\mathscr{L}\{\cosh kt\} = \frac{1}{2}(\mathscr{L}\{e^{kt}\}+\mathscr{L}\{e^{-kt}\}) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-k}+\frac{1}{s+k}\right) = \frac{s}{s^2-k^2}$ với $s>|k|$.

d) $\mathscr{L}\{\sinh kt\} = \frac{1}{2}(\mathscr{L}\{e^{kt}\}-\mathscr{L}\{e^{-kt}\}) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-k}-\frac{1}{s+k}\right) = \frac{k}{s^2-k^2}$ với $s>|k|$.

3. **Bảng các phép biến đổi Laplace**

$f(t)$	$F(s)$	s
1	$\frac{1}{s}$	$s > 0$
$t^n \ (n \in \mathbb{N})$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$s > 0$
$t^a \ (a \in \mathbb{R},\ a > -1)$	$\frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}$	$s > 0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$s > a$
$\cos kt$	$\frac{s}{s^2+k^2}$	$s > 0$
$\sin kt$	$\frac{k}{s^2+k^2}$	$s > 0$
$\cosh kt$	$\frac{s}{s^2-k^2}$	$s > \lvert k\rvert$
$\sinh kt$	$\frac{k}{s^2-k^2}$	$s > \lvert k\rvert$

Chú ý: Hàm Gamma $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx$ thỏa mãn $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$ và $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

4. **Sự tồn tại của phép biến đổi Laplace**

- **Định nghĩa:** Hàm $f(t)$ được gọi là bị chặn mũ trên $[0, \infty)$ nếu tồn tại các hằng số không âm M và α sao cho

$$|f(t)| \leq Me^{\alpha t} \quad \text{với mọi } t \geq 0.$$

- **Định lý 1:** Nếu hàm số $f(t)$ thỏa mãn:
  i) liên tục từng khúc trên $[0, \infty)$,
  ii) là hàm bị chặn mũ trên $[0, \infty)$,

  thì luôn tồn tại $\mathscr{L}\{f(t)\}(s)$ với $s > \alpha$, trong đó α là hằng số trong định nghĩa trên.

4. **Sự tồn tại của phép biến đổi Laplace**

- **Định nghĩa:** Hàm $f(t)$ được gọi là bị chặn mũ trên $[0, \infty)$ nếu tồn tại các hằng số không âm M và α sao cho
$$|f(t)| \leq Me^{\alpha t} \quad \text{với mọi } t \geq 0.$$
- **Định lý 1:** Nếu hàm số $f(t)$ thỏa mãn:
  i) liên tục từng khúc trên $[0, \infty)$,
  ii) là hàm bị chặn mũ trên $[0, \infty)$,

  thì luôn tồn tại $\mathscr{L}\{f(t)\}(s)$ với $s > \alpha$, trong đó α là hằng số trong định nghĩa trên.

  C/M: Vì $f(t)$ là hàm bị chặn mũ trên $[0, \infty)$ nên tồn tại các hằng số không âm M và α sao cho $|f(t)| \leq Me^{\alpha t}$ với mọi $t \geq 0$. Ta có:
$$\left|\int_0^A e^{-st} f(t)dt\right| \leq \int_0^A \left|e^{-st} f(t)\right|dt = \int_0^A e^{-st}|f(t)|dt$$
$$\leq \int_0^A e^{-st} Me^{\alpha t} dt = M\int_0^A e^{-(s-\alpha)t}dt = \frac{M}{s-\alpha}\left(1 - e^{-(s-\alpha)A}\right)$$
$$\leq \frac{M}{s-\alpha} \quad \text{với } s > \alpha.$$

Cho $A \to \infty$, ta có: $|F(s)| = \left|\int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt\right| = \left|\lim_{A\to\infty} \int_0^{A} e^{-st} f(t)dt\right| \leq \dfrac{M}{s-\alpha}$ với $s > \alpha$. Khi đó: $F(s)$ luôn là hữu hạn, tức là $F(s)$ tồn tại với mọi $s > \alpha \Rightarrow$ đpcm.

- **Hệ quả:** Nếu hàm số $f(t)$ thỏa mãn giả thiết của **Định lý 1**, thì

$$\lim_{s\to\infty} F(s) = 0.$$

II. Biến đổi Laplace ngược

1. **Sự duy nhất của biến đổi Laplace ngược**
   - **Định lý 2:** Giả sử 2 hàm số $f(t)$ và $g(t)$ thỏa mãn các giả thiết của **Định lý 1** để tồn tại $F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}(s)$ và $G(s) = \mathscr{L}\{g(t)\}(s)$. Khi đó: Nếu
   $$F(s) = G(s) \text{ với mọi } s > \alpha,$$
   trong đó α là hằng số trong **Định lý 1**, thì
   $$f(t) = g(t) \text{ tại những giá trị của } t \text{ mà cả 2 hàm số liên tục.}$$

Bài 1: Phép biến đổi Laplace và phép biến đổi ngược

II. Biến đổi Laplace ngược

1. **Sự duy nhất của biến đổi Laplace ngược**
   - **Định lý 2:** Giả sử 2 hàm số $f(t)$ và $g(t)$ thỏa mãn các giả thiết của **Định lý 1** để tồn tại $F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}(s)$ và $G(s) = \mathscr{L}\{g(t)\}(s)$. Khi đó: Nếu
   $$F(s) = G(s) \text{ với mọi } s > \alpha,$$
   trong đó α là hằng số trong **Định lý 1**, thì
   $$f(t) = g(t) \text{ tại những giá trị của } t \text{ mà cả 2 hàm số liên tục.}$$
2. **Định nghĩa:** Nếu $F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}(s)$, thì ta nói $f(t)$ là biến đổi Laplace ngược của hàm số $F(s)$ và viết
$$f(t) = \mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}.$$

Ví dụ: $a)\ \mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{6}{s^4}\right\} = t^3$ $\qquad b)\ \mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s-5}\right\} = e^{5t}$

$c)\ \mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{2}{s^2+4}\right\} = \sin 2t$ $\qquad d)\ \mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^2-9}\right\} = \cosh 3t$

II. Biến đổi Laplace ngược

1. **Sự duy nhất của biến đổi Laplace ngược**
   - **Định lý 2:** Giả sử 2 hàm số $f(t)$ và $g(t)$ thỏa mãn các giả thiết của **Định lý 1** để tồn tại $F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}(s)$ và $G(s) = \mathscr{L}\{g(t)\}(s)$. Khi đó: Nếu
   $$F(s) = G(s) \text{ với mọi } s > \alpha,$$
   trong đó α là hằng số trong **Định lý 1**, thì
   $$f(t) = g(t) \text{ tại những giá trị của } t \text{ mà cả 2 hàm số liên tục.}$$
2. **Định nghĩa:** Nếu $F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}(s)$, thì ta nói $f(t)$ là biến đổi Laplace ngược của hàm số $F(s)$ và viết
$$f(t) = \mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}.$$

Ví dụ: $a)\ \mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{6}{s^4}\right\} = t^3$ $\qquad b)\ \mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s-5}\right\} = e^{5t}$

$c)\ \mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{2}{s^2+4}\right\} = \sin 2t$ $\qquad d)\ \mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^2-9}\right\} = \cosh 3t$

3. **Tính chất tuyến tính:** Với mọi hằng số $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ta luôn có:
$$\mathscr{L}^{-1}\{\alpha F(s) + \beta G(s)\} = \alpha\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} + \beta\mathscr{L}^{-1}\{G(s)\}.$$

Bài 1: Phép biến đổi Laplace và phép biến đổi ngược

Ví dụ: Tính $a)\ \mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{s^2+1}{s^3}\right\}$ $\quad b)\ \mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{4}{s^2-8s+15}\right\}$

$c)\ \mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{3s-1}{s^2+5}\right\}$ $\quad d)\ \mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{-2s+1}{s^2-4}\right\}$

Giải: a) Ta có $\dfrac{s^2+1}{s^3} = \dfrac{1}{s} + \dfrac{1}{2!}.\dfrac{2!}{s^3} \Rightarrow \mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{s^2+1}{s^3}\right\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s}\right\} + \dfrac{1}{2}\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{2!}{s^3}\right\} = 1 + \dfrac{1}{2}t^2.$

b) Ta có $\dfrac{4}{s^2-8s+15} = \dfrac{4}{(s-3)(s-5)} = 2\left(\dfrac{1}{s-5} - \dfrac{1}{s-3}\right)$

$$\Rightarrow \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{4}{s^2-8s+15}\right\} = 2\left(\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-5}\right\} - \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\}\right) = 2(e^{5t}-e^{3t}).$$

c) Ta có $\dfrac{3s-1}{s^2+5} = 3\dfrac{s}{s^2+(\sqrt{5})^2} - \dfrac{1}{\sqrt{5}}\dfrac{\sqrt{5}}{s^2+(\sqrt{5})^2}$

$$\Rightarrow \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3s-1}{s^2+5}\right\} = 3\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+(\sqrt{5})^2}\right\} - \frac{1}{\sqrt{5}}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{\sqrt{5}}{s^2+(\sqrt{5})^2}\right\} = 3\cos\sqrt{5}t - \frac{1}{\sqrt{5}}\sin\sqrt{5}t.$$

d) Tương tự câu c), ta có $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{-2s+1}{s^2-4}\right\} = -2\cosh 2t + \dfrac{1}{2}\sinh 2t.$

Bài 2: BIẾN ĐỔI LAPLACE CỦA ĐẠO HÀM, TÍCH PHÂN

Bài 2: Biến đổi Laplace của đạo hàm, tích phân

I. Biến đổi Laplace của đạo hàm

1. **Định nghĩa:** Hàm $f(t)$ được gọi là trơn từng khúc trên $[a,b]$ nếu nó khả vi trên $[a,b]$ (trừ ra một số hữu hạn điểm) và $f'(t)$ liên tục từng khúc trên $[a,b]$.
2. **Định lý** (Đạo hàm cấp 1): Nếu hàm $f(t)$ thỏa mãn giả thiết
   i) liên tục và trơn từng khúc trên $[0,\infty)$,
   ii) là hàm bị chặn mũ trên $[0,\infty)$, tức là tồn tại các hằng số không âm M và α sao cho
   $|f(t)| \leq Me^{\alpha t}$ với mọi $t \geq 0$,

   thì luôn tồn tại $\mathscr{L}\{f'(t)\}(s)$ với $s > \alpha$ và

$$\mathscr{L}\{f'(t)\}(s) = s\mathscr{L}\{f(t)\}(s) - f(0).$$

I. Biến đổi Laplace của đạo hàm

1. **Định nghĩa:** Hàm $f(t)$ được gọi là trơn từng khúc trên $[a, b]$ nếu nó khả vi trên $[a, b]$ (trừ ra một số hữu hạn điểm) và $f'(t)$ liên tục từng khúc trên $[a, b]$.
2. **Định lý** (Đạo hàm cấp 1): Nếu hàm $f(t)$ thỏa mãn giả thiết
   i) liên tục và trơn từng khúc trên $[0, \infty)$,
   ii) là hàm bị chặn mũ trên $[0, \infty)$, tức là tồn tại các hằng số không âm M và α sao cho
   $|f(t)| \leq Me^{\alpha t} \quad$ với mọi $t \geq 0$,

   thì luôn tồn tại $\mathscr{L}\{f'(t)\}(s)$ với $s > \alpha$ và

$$\mathscr{L}\{f'(t)\}(s) = s\mathscr{L}\{f(t)\}(s) - f(0).$$

C/M: Ta có:

$$\mathscr{L}\{f'(t)\}(s) = \int_0^\infty e^{-st} f'(t)dt = \int_0^\infty e^{-st} df(t) = e^{-st} f(t)\Big|_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt \quad (*)$$

Theo giả thiết ii): $|e^{-st} f(t)| \leq Me^{-st}e^{\alpha t} = Me^{-(s-\alpha)t} \quad \forall t \geq 0$. Vì $\lim\limits_{t\to\infty} e^{-(s-\alpha)t} = 0$ với $s > \alpha$

$\Rightarrow \lim\limits_{t\to\infty} e^{-st} f(t) = 0 \Rightarrow e^{-st} f(t)\Big|_0^\infty = -f(0)$ với $s > \alpha$.

Mặt khác: Theo **Định lý 1** (Bài 1), giả thiết của định lý này suy ra tồn tại $\mathscr{L}\{f(t)\}(s)$ với $s > \alpha$, tức là $F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt \Rightarrow$ VP$(*) = sF(s) - f(0) \Rightarrow$ đpcm.

Bài 2: Biến đổi Laplace của đạo hàm, tích phân

Mặt khác: Theo **Định lý 1** (Bài 1), giả thiết của định lý này suy ra tồn tại $\mathscr{L}\{f(t)\}(s)$ với $s > \alpha$, tức là $F(s) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt \Rightarrow \text{VP}(*) = sF(s) - f(0) \Rightarrow$ đpcm.

3. **Hệ quả** (Đạo hàm cấp cao): Nếu các hàm $f(t), f'(t), \cdots, f^{(n-1)}(t)$ thỏa mãn giả thiết
   i) liên tục và trơn từng khúc trên $[0, \infty)$,
   ii) là hàm bị chặn mũ trên $[0, \infty)$,

   thì luôn tồn tại $\mathscr{L}\{f^{(n)}(t)\}(s)$ với $s > \alpha$ và

$$\mathscr{L}\{f^{(n)}(t)\}(s) = s^n \mathscr{L}\{f(t)\}(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0).$$

Mặt khác: Theo **Định lý 1** (Bài 1), giả thiết của định lý này suy ra tồn tại $\mathscr{L}\{f(t)\}(s)$ với $s > \alpha$, tức là $F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt \Rightarrow \text{VP}(*) = sF(s) - f(0) \Rightarrow$ đpcm.

3. **Hệ quả** (Đạo hàm cấp cao): Nếu các hàm $f(t), f'(t), \cdots, f^{(n-1)}(t)$ thỏa mãn giả thiết
   i) liên tục và trơn từng khúc trên $[0, \infty)$,
   ii) là hàm bị chặn mũ trên $[0, \infty)$,

   thì luôn tồn tại $\mathscr{L}\{f^{(n)}(t)\}(s)$ với $s > \alpha$ và

$$\mathscr{L}\{f^{(n)}(t)\}(s) = s^n \mathscr{L}\{f(t)\}(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0).$$

C/M: Ta sử dụng lập luận quy nạp toán học. Đầu tiên, $n = 1$ công thức trên đúng (chứng minh trên).

- Giả sử nó đúng cho $n = k$, tức là
  $\mathscr{L}\{f^{(k)}(t)\}(s) = s^k \mathscr{L}\{f(t)\}(s) - s^{k-1}f(0) - s^{k-2}f'(0) - \cdots - f^{(k-1)}(0) \quad (1).$
- Ta chứng minh nó cũng đúng cho $n = k + 1$, tức là
  $\mathscr{L}\{f^{(k+1)}(t)\}(s) = s^{k+1} \mathscr{L}\{f(t)\}(s) - s^k f(0) - s^{k-1}f'(0) - \cdots - f^{(k)}(0) \quad (2).$
  Thật vậy, đặt $g(t) = f^{(k)}(t)$
  $\Rightarrow \text{VT}(2) = \mathscr{L}\{g'(t)\}(s) = sG(s) - g(0) = s\mathscr{L}\{f^{(k)}(t)\}(s) - f^{(k)}(0) = \text{VP}(2)$ do (1).

II. Một số áp dụng đối với biến đổi Laplace của đạo hàm

1. **Áp dụng vào giải bài toán với giá trị ban đầu**
   - **Ví dụ:** Giải các PT, HPT với giá trị ban đầu sau đây:

a) $x'' + 4x = \sin 3t, \quad x(0) = x'(0) = 0.$

b) $x'' - 5x' + 6x = 3, \quad x(0) = x'(0) = 0.$

c) $\begin{cases} x' + 2y' + x = 0, & x(0) = 0, \\ x' - y' + y = 0, & y(0) = 1. \end{cases}$

d) $\begin{cases} x'' + 2x + 4y = 0, & x(0) = y(0) = 0, \\ y'' + x + 2y = 0, & x'(0) = y'(0) = -1. \end{cases}$

e) $\begin{cases} x'' + 3x - y = 0, & x(0) = y(0) = 0, \\ y'' - 2x + 2y = 40 \sin 3t, & x'(0) = y'(0) = 0. \end{cases}$

II. Một số áp dụng đối với biến đổi Laplace của đạo hàm

1. Áp dụng vào giải bài toán với giá trị ban đầu

- **Ví dụ:** Giải các PT, HPT với giá trị ban đầu sau đây:

  a) $x'' + 4x = \sin 3t, \quad x(0) = x'(0) = 0.$

  b) $x'' - 5x' + 6x = 3, \quad x(0) = x'(0) = 0.$

  c) $\begin{cases} x' + 2y' + x = 0, & x(0) = 0, \\ x' - y' + y = 0, & y(0) = 1. \end{cases}$

  d) $\begin{cases} x'' + 2x + 4y = 0, & x(0) = y(0) = 0, \\ y'' + x + 2y = 0, & x'(0) = y'(0) = -1. \end{cases}$

  e) $\begin{cases} x'' + 3x - y = 0, & x(0) = y(0) = 0, \\ y'' - 2x + 2y = 40 \sin 3t, & x'(0) = y'(0) = 0. \end{cases}$

- **Cách giải:**
  - **B1:** Đặt $F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}(s)$. Biến đổi Laplace 2 vế kết hợp sử dụng công thức biến đổi Laplace của đạo hàm và điều kiện ban đầu để tính $F(s)$.
  - **B2:** Sử dụng biến đổi Laplace ngược để tìm ra nghiệm $f(t)$.

Bài 2: Biến đổi Laplace của đạo hàm, tích phân

Giải: a) Đặt $X(s) = \mathscr{L}\{x(t)\}(s)$, biến đổi Laplace 2 vế ta có:

$$\mathscr{L}\{x''(t)\}(s) + 4\mathscr{L}\{x(t)\}(s) = \mathscr{L}\{\sin 3t\}(s)$$

$$\Leftrightarrow s^2X(s) - sx(0) - x'(0) + 4X(s) = \frac{3}{s^2+9}$$

$$\Leftrightarrow X(s) = \frac{3}{(s^2+4)(s^2+9)}$$

Ta có: $X(s) = \frac{3}{5}\left(\frac{1}{s^2+4} - \frac{1}{s^2+9}\right) = \frac{3}{10}.\frac{2}{s^2+2^2} - \frac{1}{5}.\frac{3}{s^2+3^2}$

$\Rightarrow x(t) = \frac{3}{10}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+2^2}\right\} - \frac{1}{5}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s^2+3^2}\right\} = \frac{3}{10}\sin 2t - \frac{1}{5}\sin 3t.$

Bài 2: Biến đổi Laplace của đạo hàm, tích phân

Giải: a) Đặt $X(s) = \mathscr{L}\{x(t)\}(s)$, biến đổi Laplace 2 vế ta có:

$$\mathscr{L}\{x''(t)\}(s) + 4\mathscr{L}\{x(t)\}(s) = \mathscr{L}\{\sin 3t\}(s)$$

$$\Leftrightarrow s^2X(s) - sx(0) - x'(0) + 4X(s) = \frac{3}{s^2+9}$$

$$\Leftrightarrow X(s) = \frac{3}{(s^2+4)(s^2+9)}$$

Ta có: $X(s) = \frac{3}{5}\left(\frac{1}{s^2+4} - \frac{1}{s^2+9}\right) = \frac{3}{10}.\frac{2}{s^2+2^2} - \frac{1}{5}.\frac{3}{s^2+3^2}$

$\Rightarrow x(t) = \frac{3}{10}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+2^2}\right\} - \frac{1}{5}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s^2+3^2}\right\} = \frac{3}{10}\sin 2t - \frac{1}{5}\sin 3t.$

c) Đặt $X(s) = \mathscr{L}\{x(t)\}(s)$ và $Y(s) = \mathscr{L}\{y(t)\}(s)$, biến đổi Laplace 2 vế ta có:

$$\begin{cases} \mathscr{L}\{x'(t)\}(s) + 2\mathscr{L}\{y'(t)\}(s) + \mathscr{L}\{x(t)\}(s) = 0 \\ \mathscr{L}\{x'(t)\}(s) - \mathscr{L}\{y'(t)\}(s) + \mathscr{L}\{y(t)\}(s) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} sX(s) - x(0) + 2\big(sY(s) - y(0)\big) + X(s) = 0 \\ sX(s) - x(0) - \big(sY(s) - y(0)\big) + Y(s) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (s+1)X(s) + 2sY(s) = 2 \\ sX(s) - (s-1)Y(s) = -1 \end{cases}$$

Cần nhớ: Giải HPT bậc nhất 2 ẩn $\begin{cases} aX + bY = c \\ a'X + b'Y = c' \end{cases}$. Trong trường hợp HPT có nghiệm duy nhất thì nghiệm là $\begin{cases} X = \dfrac{D_x}{D} \\ Y = \dfrac{D_y}{D} \end{cases}$ trong đó $D = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$, $D_x = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}$, $D_y = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}$. Khi đó:

$$\begin{cases} X(s) = -\dfrac{2}{3s^2-1} = -\dfrac{2}{3}.\dfrac{1}{s^2-1/3} = -\dfrac{2}{\sqrt{3}}.\dfrac{1/\sqrt{3}}{s^2-(1/\sqrt{3})^2} \\ Y(s) = \dfrac{3s+1}{3s^2-1} = \dfrac{s+\frac{1}{3}}{s^2-\frac{1}{3}} = \dfrac{s}{s^2-(1/\sqrt{3})^2} + \dfrac{1}{\sqrt{3}}.\dfrac{1/\sqrt{3}}{s^2-(1/\sqrt{3})^2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x(t) = -\dfrac{2}{\sqrt{3}}\sinh\dfrac{1}{\sqrt{3}}t \\ y(t) = \cosh\dfrac{1}{\sqrt{3}}t + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\sinh\dfrac{1}{\sqrt{3}}t. \end{cases}$$

Bài 2: Biến đổi Laplace của đạo hàm, tích phân

d) Đặt $X(s) = \mathscr{L}\{x(t)\}(s)$ và $Y(s) = \mathscr{L}\{y(t)\}(s)$, biến đổi Laplace 2 vế ta có:

$$\begin{cases} \mathscr{L}\{x''(t)\}(s) + 2\mathscr{L}\{x(t)\}(s) + 4\mathscr{L}\{y(t)\}(s) = 0 \\ \mathscr{L}\{y''(t)\}(s) + \mathscr{L}\{x(t)\}(s) + 2\mathscr{L}\{y(t)\}(s) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} s^2X(s) - sx(0) - x'(0) + 2X(s) + 4Y(s) = 0 \\ s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + X(s) + 2Y(s) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (s^2+2)X(s) + 4Y(s) = -1 \\ X(s) + (s^2+2)Y(s) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X(s) = -\dfrac{s^2-2}{s^2(s^2+4)} \\ Y(s) = -\dfrac{s^2+1}{s^2(s^2+4)} \end{cases}$$

Bài 2: Biến đổi Laplace của đạo hàm, tích phân

d) Đặt $X(s) = \mathscr{L}\{x(t)\}(s)$ và $Y(s) = \mathscr{L}\{y(t)\}(s)$, biến đổi Laplace 2 vế ta có:

$$\begin{cases} \mathscr{L}\{x''(t)\}(s) + 2\mathscr{L}\{x(t)\}(s) + 4\mathscr{L}\{y(t)\}(s) = 0 \\ \mathscr{L}\{y''(t)\}(s) + \mathscr{L}\{x(t)\}(s) + 2\mathscr{L}\{y(t)\}(s) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} s^2X(s) - sx(0) - x'(0) + 2X(s) + 4Y(s) = 0 \\ s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + X(s) + 2Y(s) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (s^2+2)X(s) + 4Y(s) = -1 \\ X(s) + (s^2+2)Y(s) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X(s) = -\dfrac{s^2-2}{s^2(s^2+4)} \\ Y(s) = -\dfrac{s^2+1}{s^2(s^2+4)} \end{cases}$$

Đặt $X(s) = \dfrac{A}{s^2} + \dfrac{B}{s^2+4} \Rightarrow A = \dfrac{1}{2}, B = -\dfrac{3}{2}$ và $Y(s) = \dfrac{C}{s^2} + \dfrac{D}{s^2+4} \Rightarrow C = -\dfrac{1}{4}, D = -\dfrac{3}{4}$.

Khi đó: $\begin{cases} X(s) = \dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{s^2} - \dfrac{3}{4}.\dfrac{2}{s^2+2^2} \\ Y(s) = -\dfrac{1}{4}.\dfrac{1}{s^2} - \dfrac{3}{8}.\dfrac{2}{s^2+2^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = \dfrac{1}{2}t - \dfrac{3}{4}\sin 2t \\ y(t) = -\dfrac{1}{4}t - \dfrac{3}{8}\sin 2t. \end{cases}$

2. **Các kỹ thuật biến đổi bổ sung**
   - **Ví dụ:** Chứng minh các công thức biến đổi sau đây:

a) $\mathscr{L}\{te^{at}\}(s) = \dfrac{1}{(s-a)^2}$ với $a \in \mathbb{R}$. Tổng quát: $\mathscr{L}\{t^n e^{at}\}(s) = \dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}}$

b) $\mathscr{L}\{t \sin kt\}(s) = \dfrac{2ks}{(s^2+k^2)^2}$

c) $\mathscr{L}\{t \cos kt\}(s) = \dfrac{s^2-k^2}{(s^2+k^2)^2}$

d) $\mathscr{L}\{t \sinh kt\}(s) = \dfrac{2ks}{(s^2-k^2)^2}$

e) $\mathscr{L}\{t \cosh kt\}(s) = \dfrac{s^2+k^2}{(s^2-k^2)^2}$

Bài 2: Biến đổi Laplace của đạo hàm, tích phân

2. **Các kỹ thuật biến đổi bổ sung**
   - **Ví dụ:** Chứng minh các công thức biến đổi sau đây:

     a) $\mathscr{L}\{te^{at}\}(s) = \dfrac{1}{(s-a)^2}$ với $a \in \mathbb{R}$. Tổng quát: $\mathscr{L}\{t^n e^{at}\}(s) = \dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}}$

     b) $\mathscr{L}\{t\sin kt\}(s) = \dfrac{2ks}{(s^2+k^2)^2}$ c) $\mathscr{L}\{t\cos kt\}(s) = \dfrac{s^2-k^2}{(s^2+k^2)^2}$

     d) $\mathscr{L}\{t\sinh kt\}(s) = \dfrac{2ks}{(s^2-k^2)^2}$ e) $\mathscr{L}\{t\cosh kt\}(s) = \dfrac{s^2+k^2}{(s^2-k^2)^2}$

   - **Cách giải:**
     - **B1:** Đặt hàm số cần biến đổi là $f(t)$ và tính đạo hàm cấp cao đến khi xuất hiện lại hàm số ban đầu $f(t)$ đó.
     - **B2:** Áp dụng biến đổi Laplace 2 vế kết hợp công thức biến đổi Laplace của đạo hàm để tính $F(s)$.

Bài 2: Biến đổi Laplace của đạo hàm, tích phân

2. **Các kỹ thuật biến đổi bổ sung**
   - **Ví dụ:** Chứng minh các công thức biến đổi sau đây:

     a) $\mathscr{L}\{te^{at}\}(s) = \dfrac{1}{(s-a)^2}$ với $a \in \mathbb{R}$. Tổng quát: $\mathscr{L}\{t^n e^{at}\}(s) = \dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}}$

     b) $\mathscr{L}\{t\sin kt\}(s) = \dfrac{2ks}{(s^2+k^2)^2}$ c) $\mathscr{L}\{t\cos kt\}(s) = \dfrac{s^2-k^2}{(s^2+k^2)^2}$

     d) $\mathscr{L}\{t\sinh kt\}(s) = \dfrac{2ks}{(s^2-k^2)^2}$ e) $\mathscr{L}\{t\cosh kt\}(s) = \dfrac{s^2+k^2}{(s^2-k^2)^2}$
   - **Cách giải:**
     - **B1:** Đặt hàm số cần biến đổi là $f(t)$ và tính đạo hàm cấp cao đến khi xuất hiện lại hàm số ban đầu $f(t)$ đó.
     - **B2:** Áp dụng biến đổi Laplace 2 vế kết hợp công thức biến đổi Laplace của đạo hàm để tính $F(s)$.

Giải: a) Đặt $f(t) = te^{at} \Rightarrow f'(t) = e^{at} + ate^{at} = e^{at} + af(t)$. Biến đổi Laplace 2 vế ta có:

$$\mathscr{L}\{f'(t)\}(s) = \mathscr{L}\{e^{at}\}(s) + a\mathscr{L}\{f(t)\}(s) \Leftrightarrow sF(s) - f(0) = \frac{1}{s-a} + aF(s)$$

Bài 2: Biến đổi Laplace của đạo hàm, tích phân

$$\Leftrightarrow (s-a)F(s) = \frac{1}{s-a} + f(0) = \frac{1}{s-a} \Leftrightarrow F(s) = \frac{1}{(s-a)^2}.$$

- Giả sử công thức đúng đến $n = k$, tức là $\mathscr{L}\{t^k e^{at}\}(s) = \dfrac{k!}{(s-a)^{k+1}}$.
- Ta C/M công thức cũng đúng cho $n = k+1$, tức là cần C/M: $\mathscr{L}\{t^{k+1} e^{at}\}(s) = \dfrac{(k+1)!}{(s-a)^{k+2}}$.

Thật vậy: Đặt $g(t) = t^{k+1}e^{at} \Rightarrow g'(t) = (k+1)t^k e^{at} + at^{k+1}e^{at} = (k+1)t^k e^{at} + ag(t)$.
Biến đổi Laplace 2 vế ta có:

$$\mathscr{L}\{g'(t)\}(s) = (k+1)\mathscr{L}\{t^k e^{at}\}(s) + a\mathscr{L}\{g(t)\}(s)$$

$$\Leftrightarrow sG(s) - f(0) = \frac{(k+1)!}{(s-a)^{k+1}} + aG(s)$$

$$\Leftrightarrow (s-a)G(s) = \frac{(k+1)!}{(s-a)^{k+1}} + g(0) \Leftrightarrow G(s) = \frac{(k+1)!}{(s-a)^{k+2}} \Rightarrow \text{đpcm}.$$

Bài 2: Biến đổi Laplace của đạo hàm, tích phân

$$\Leftrightarrow (s-a)F(s) = \frac{1}{s-a} + f(0) = \frac{1}{s-a} \Leftrightarrow F(s) = \frac{1}{(s-a)^2}.$$

- Giả sử công thức đúng đến $n = k$, tức là $\mathscr{L}\{t^k e^{at}\}(s) = \dfrac{k!}{(s-a)^{k+1}}$.
- Ta C/M công thức cũng đúng cho $n = k+1$, tức là cần C/M: $\mathscr{L}\{t^{k+1} e^{at}\}(s) = \dfrac{(k+1)!}{(s-a)^{k+2}}$.

Thật vậy: Đặt $g(t) = t^{k+1}e^{at} \Rightarrow g'(t) = (k+1)t^k e^{at} + at^{k+1}e^{at} = (k+1)t^k e^{at} + ag(t)$.
Biến đổi Laplace 2 vế ta có:

$$\mathscr{L}\{g'(t)\}(s) = (k+1)\mathscr{L}\{t^k e^{at}\}(s) + a\mathscr{L}\{g(t)\}(s)$$

$$\Leftrightarrow sG(s) - f(0) = \frac{(k+1)!}{(s-a)^{k+1}} + aG(s)$$

$$\Leftrightarrow (s-a)G(s) = \frac{(k+1)!}{(s-a)^{k+1}} + g(0) \Leftrightarrow G(s) = \frac{(k+1)!}{(s-a)^{k+2}} \Rightarrow \text{đpcm.}$$

d) Chú ý: $(\sinh kt)' = \left(\dfrac{e^{kt} - e^{-kt}}{2}\right)' = k\cosh kt$ và $(\cosh kt)' = \left(\dfrac{e^{kt} + e^{-kt}}{2}\right)' = k\sinh kt$.

Bài 2: Biến đổi Laplace của đạo hàm, tích phân

Đặt $f(t) = t\sinh kt \Rightarrow f'(t) = \sinh kt + kt\cosh kt$

$$\Rightarrow f''(t) = k\cosh kt + k(\cosh kt + kt\sinh kt)$$
$$= 2k\cosh kt + k^2 t\sinh kt = 2k\cosh kt + k^2 f(t).$$

Biến đổi Laplace 2 vế ta có:

$$\mathscr{L}\{f''(t)\}(s) = 2k\mathscr{L}\{\cosh kt\}(s) + k^2\mathscr{L}\{f(t)\}(s)$$
$$\Leftrightarrow s^2F(s) - sf(0) - f'(0) = \frac{2ks}{s^2-k^2} + k^2F(s)$$
$$\Leftrightarrow (s^2-k^2)F(s) = \frac{2ks}{s^2-k^2} \Leftrightarrow F(s) = \frac{2ks}{(s^2-k^2)^2}.$$

Bài 2: Biến đổi Laplace của đạo hàm, tích phân

Đặt $f(t) = t\sinh kt \Rightarrow f'(t) = \sinh kt + kt\cosh kt$

$$\Rightarrow f''(t) = k\cosh kt + k(\cosh kt + kt\sinh kt)$$
$$= 2k\cosh kt + k^2 t\sinh kt = 2k\cosh kt + k^2 f(t).$$

Biến đổi Laplace 2 vế ta có:

$$\mathscr{L}\{f''(t)\}(s) = 2k\mathscr{L}\{\cosh kt\}(s) + k^2\mathscr{L}\{f(t)\}(s)$$
$$\Leftrightarrow s^2F(s) - sf(0) - f'(0) = \frac{2ks}{s^2-k^2} + k^2F(s)$$
$$\Leftrightarrow (s^2-k^2)F(s) = \frac{2ks}{s^2-k^2} \Leftrightarrow F(s) = \frac{2ks}{(s^2-k^2)^2}.$$

III. Biến đổi Laplace của tích phân

1. **Định lý:** Nếu hàm $f(t)$ thỏa mãn giả thiết
   i) liên tục từng khúc trên $[0,\infty)$,
   ii) là hàm bị chặn mũ trên $[0,\infty)$, tức là tồn tại các hằng số không âm M và α sao cho $|f(t)| \le Me^{\alpha t}$ với mọi $t \ge 0$,

   thì

$$\mathscr{L}\left\{\int_0^t f(r)dr\right\}(s) = \frac{1}{s}\mathscr{L}\{f(t)\}(s) = \frac{F(s)}{s} \quad \text{với } s > \alpha,$$

Bài 2: Biến đổi Laplace của đạo hàm, tích phân

tức là $$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{F(s)}{s}\right\}(t) = \int_0^t f(r)dr = \int_0^t \mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}(r)dr.$$

Bài 2: Biến đổi Laplace của đạo hàm, tích phân

tức là $$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{F(s)}{s}\right\}(t) = \int_0^t f(r)dr = \int_0^t \mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}(r)dr.$$

C/M: Đặt $g(t) = \displaystyle\int_0^t f(r)dr$. Vì giả thiết i) nên $g(t)$ cũng là liên tục từng khúc trên $[0, \infty)$. Theo giả thiết ii) ta có:

$$|g(t)| \le \int_0^t |f(r)|dr \le M \int_0^t e^{\alpha r}dr = \frac{M}{\alpha}(e^{\alpha t} - 1) \text{ với mọi } t \ge 0$$

$\Rightarrow g(t)$ cũng là hàm bị chặn mũ trên $[0, \infty)$. Khi đó:

$$\mathscr{L}\{g'(t)\}(s) = s\mathscr{L}\{g(t)\}(s) - g(0)$$

$$\Leftrightarrow \mathscr{L}\{f(t)\}(s) = s\mathscr{L}\left\{\int_0^t f(r)dr\right\}(s) \Leftrightarrow \mathscr{L}\left\{\int_0^t f(r)dr\right\}(s) = \frac{1}{s}\mathscr{L}\{f(t)\}(s) \Rightarrow \text{đpcm.}$$

tức là $$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{F(s)}{s}\right\}(t) = \int_0^t f(r)dr = \int_0^t \mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}(r)dr.$$

C/M: Đặt $g(t) = \displaystyle\int_0^t f(r)dr$. Vì giả thiết i) nên $g(t)$ cũng là liên tục từng khúc trên $[0, \infty)$. Theo giả thiết ii) ta có:

$$|g(t)| \leq \int_0^t |f(r)|dr \leq M \int_0^t e^{\alpha r}dr = \frac{M}{\alpha}(e^{\alpha t} - 1) \text{ với mọi } t \geq 0$$

$\Rightarrow g(t)$ cũng là hàm bị chặn mũ trên $[0, \infty)$. Khi đó:

$$\mathscr{L}\{g'(t)\}(s) = s\mathscr{L}\{g(t)\}(s) - g(0)$$

$$\Leftrightarrow \mathscr{L}\{f(t)\}(s) = s\mathscr{L}\left\{\int_0^t f(r)dr\right\}(s) \Leftrightarrow \mathscr{L}\left\{\int_0^t f(r)dr\right\}(s) = \frac{1}{s}\mathscr{L}\{f(t)\}(s) \Rightarrow \text{đpcm.}$$

2. **Ví dụ:** Tính $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2(s-2023)}\right\}$.

tức là $$\mathscr{L}^{-1}\Big\{\frac{F(s)}{s}\Big\}(t) = \int_0^t f(r)dr = \int_0^t \mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}(r)dr.$$

C/M: Đặt $g(t) = \displaystyle\int_0^t f(r)dr$. Vì giả thiết i) nên $g(t)$ cũng là liên tục từng khúc trên $[0,\infty)$. Theo giả thiết ii) ta có:

$$|g(t)| \le \int_0^t |f(r)|dr \le M\int_0^t e^{\alpha r}dr = \frac{M}{\alpha}(e^{\alpha t}-1) \text{ với mọi } t \ge 0$$

$\Rightarrow g(t)$ cũng là hàm bị chặn mũ trên $[0,\infty)$. Khi đó:

$$\mathscr{L}\{g'(t)\}(s) = s\mathscr{L}\{g(t)\}(s) - g(0)$$

$$\Leftrightarrow \mathscr{L}\{f(t)\}(s) = s\mathscr{L}\Big\{\int_0^t f(r)dr\Big\}(s) \Leftrightarrow \mathscr{L}\Big\{\int_0^t f(r)dr\Big\}(s) = \frac{1}{s}\mathscr{L}\{f(t)\}(s) \Rightarrow \text{đpcm.}$$

2. **Ví dụ:** Tính $\mathscr{L}^{-1}\Big\{\dfrac{1}{s^2(s-2023)}\Big\}$.

   Giải: Đặt $F(s) = \dfrac{1}{s(s-2023)} = \dfrac{1}{2023}\Big(\dfrac{1}{s-2023} - \dfrac{1}{s}\Big) \Rightarrow \mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} = \dfrac{1}{2023}(e^{2023t}-1)$. Thay vào CT trên ta có $\mathscr{L}^{-1}\Big\{\dfrac{1}{s^2(s-2023)}\Big\} = \dfrac{1}{2023}\displaystyle\int_0^t (e^{2023r}-1)dr = \dfrac{e^{2023t}-1}{2023^2} - \dfrac{t}{2023}$.

Bài 3: PHÉP TỊNH TIẾN VÀ PHÂN THỨC ĐƠN GIẢN

Bài 3: Phép tịnh tiến và phân thức đơn giản

I. Phép tịnh tiến của biến đổi Laplace

1. **Định lý** (Phép tịnh tiến): Nếu hàm $F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}(s)$ tồn tại với $s > \alpha$, thì tồn tại $\mathscr{L}\{e^{at}f(t)\}(s)$ tồn tại với $s > \alpha + a$ và

$$\mathscr{L}\{e^{at}f(t)\}(s) = F(s-a),$$

tức là

$$\mathscr{L}^{-1}\{F(s-a)\} = e^{at}f(t).$$

Bài 3: Phép tịnh tiến và phân thức đơn giản

I. Phép tịnh tiến của biến đổi Laplace

1. **Định lý** (Phép tịnh tiến): Nếu hàm $F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}(s)$ tồn tại với $s > \alpha$, thì tồn tại $\mathscr{L}\{e^{at}f(t)\}(s)$ tồn tại với $s > \alpha + a$ và

$$\mathscr{L}\{e^{at}f(t)\}(s) = F(s-a),$$

tức là

$$\mathscr{L}^{-1}\{F(s-a)\} = e^{at}f(t).$$

C/M: Ta có: $F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}(s) = \int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$, với $s > \alpha$

$$\Rightarrow F(s-a) = \int_0^\infty e^{-(s-a)t}f(t)dt, \text{ với } s-a > \alpha \Leftrightarrow s > \alpha + a$$

$$= \int_0^\infty e^{-st}\big(e^{at}f(t)\big)dt = \mathscr{L}\{e^{at}f(t)\}(s).$$

Bài 3: Phép tịnh tiến và phân thức đơn giản

I. Phép tịnh tiến của biến đổi Laplace

1. **Định lý** (Phép tịnh tiến): Nếu hàm $F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}(s)$ tồn tại với $s > \alpha$, thì tồn tại $\mathscr{L}\{e^{at}f(t)\}(s)$ tồn tại với $s > \alpha + a$ và

$$\mathscr{L}\{e^{at}f(t)\}(s) = F(s-a),$$

tức là
$$\mathscr{L}^{-1}\{F(s-a)\} = e^{at}f(t).$$

C/M: Ta có: $F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}(s) = \int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$, với $s > \alpha$

$$\Rightarrow F(s-a) = \int_0^\infty e^{-(s-a)t}f(t)dt, \text{ với } s-a > \alpha \Leftrightarrow s > \alpha + a$$
$$= \int_0^\infty e^{-st}\big(e^{at}f(t)\big)dt = \mathscr{L}\{e^{at}f(t)\}(s).$$

Ví dụ: a) $\mathscr{L}\{e^{at}t^n\}(s) = \dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}}$ với $s > a$.

b) $\mathscr{L}\{e^{at}\cos kt\}(s) = \dfrac{s-a}{(s-a)^2 + k^2}$ với $s > a$.

Bài 3: Phép tịnh tiến và phân thức đơn giản

c) $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{k}{(s-a)^2+k^2}\right\} = e^{at}\sin kt$ với $s > a$.

d) $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{k}{(s-a)^2-k^2}\right\} = e^{at}\sinh kt$ với $s > |k| + a$.

2. **Áp dụng:** Tìm các biến đổi Laplace sau đây:

   a) $\mathscr{L}\{(e^t+t)^2\}(s)$

   b) $\mathscr{L}\left\{e^{3t}\sin\left(t+\dfrac{\pi}{4}\right)\right\}(s)$

   c) $\mathscr{L}\{e^{2t}(\sin 3t + 2\cos 3t)\}(s)$

c) $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{k}{(s-a)^2+k^2}\right\} = e^{at}\sin kt$ với $s > a$.

d) $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{k}{(s-a)^2-k^2}\right\} = e^{at}\sinh kt$ với $s > |k| + a$.

2. **Áp dụng:** Tìm các biến đổi Laplace sau đây:
   a) $\mathscr{L}\{(e^t+t)^2\}(s)$
   b) $\mathscr{L}\left\{e^{3t}\sin\left(t+\dfrac{\pi}{4}\right)\right\}(s)$
   c) $\mathscr{L}\{e^{2t}(\sin 3t + 2\cos 3t)\}(s)$

Giải: a) $F(s) = \mathscr{L}\{e^{2t}\}(s) + 2\mathscr{L}\{e^t t\}(s) + \mathscr{L}\{t^2\}(s) = \dfrac{1}{s-2} + \dfrac{2}{(s-1)^2} + \dfrac{2}{s^3}$.

b) $$F(s) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\mathscr{L}\{e^{3t}\sin t\}(s) + \mathscr{L}\{e^{3t}\cos t\}(s)\right)$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{(s-3)^2+1} + \frac{s-3}{(s-3)^2+1}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{s-2}{(s-3)^2+1}.$$

c) Tương tự: $F(s) = \dfrac{3}{(s-2)^2+9} + 2\dfrac{s-2}{(s-2)^2+9} = \dfrac{2s-1}{(s-2)^2+9}$.

II. Biến đổi phân thức đơn giản $\dfrac{P(s)}{Q(s)}$

1. **Quy tắc 1** (Phân thức đơn giản bậc một): Nếu $Q(s)$ có chứa $(s-a)^n$, thì ta phân tích $\dfrac{P(s)}{Q(s)}$ chứa các số hạng sau
$$\frac{A_1}{s-a}+\frac{A_2}{(s-a)^2}+\cdots+\frac{A_n}{(s-a)^n}$$
2. **Quy tắc 2** (Phân thức đơn giản bậc hai): Nếu $Q(s)$ có chứa $\left((s-a)^2+b^2\right)^n$, thì ta phân tích $\dfrac{P(s)}{Q(s)}$ chứa các số hạng sau
$$\frac{A_1s+B_1}{(s-a)^2+b^2}+\frac{A_2s+B_2}{\left((s-a)^2+b^2\right)^2}+\cdots+\frac{A_ns+B_n}{\left((s-a)^2+b^2\right)^n}$$

II. Biến đổi phân thức đơn giản $\dfrac{P(s)}{Q(s)}$

1. **Quy tắc 1** (Phân thức đơn giản bậc một): Nếu $Q(s)$ có chứa $(s-a)^n$, thì ta phân tích $\dfrac{P(s)}{Q(s)}$ chứa các số hạng sau
$$\frac{A_1}{s-a}+\frac{A_2}{(s-a)^2}+\cdots+\frac{A_n}{(s-a)^n}$$
2. **Quy tắc 2** (Phân thức đơn giản bậc hai): Nếu $Q(s)$ có chứa $\left((s-a)^2+b^2\right)^n$, thì ta phân tích $\dfrac{P(s)}{Q(s)}$ chứa các số hạng sau
$$\frac{A_1s+B_1}{(s-a)^2+b^2}+\frac{A_2s+B_2}{\left((s-a)^2+b^2\right)^2}+\cdots+\frac{A_ns+B_n}{\left((s-a)^2+b^2\right)^n}$$

Ví dụ: Tìm các biến đổi Laplace ngược sau đây:

a) $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{s^2+1}{s^3-2s^2-8s}\right\}$ b) $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{s^2+2s}{s^4+5s^2+4}\right\}$

Bài 3: Phép tịnh tiến và phân thức đơn giản

Giải: a) Ta có: $F(s) = \dfrac{s^2+1}{s(s-4)(s+2)} = \dfrac{A}{s} + \dfrac{B}{s-4} + \dfrac{C}{s+2}$

$$\Leftrightarrow s^2 + 1 = A(s-4)(s+2) + Bs(s+2) + Cs(s-4).$$

Áp dụng **Cách 1** (PP đồng nhất hệ số) hoặc **Cách 2** (Thay $s = 0$, $s = 4$, $s = -2$)

$$\Rightarrow A = -\frac{1}{8}, B = \frac{17}{24}, C = \frac{5}{12}.$$

Khi đó: $f(t) = -\dfrac{1}{8}\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s}\right\} + \dfrac{17}{24}\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s-4}\right\} + \dfrac{5}{12}\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s+2}\right\} = -\dfrac{1}{8} + \dfrac{17}{24}e^{4t} + \dfrac{5}{12}e^{-2t}.$

Bài 3: Phép tịnh tiến và phân thức đơn giản

Giải: a) Ta có: $F(s) = \dfrac{s^2+1}{s(s-4)(s+2)} = \dfrac{A}{s} + \dfrac{B}{s-4} + \dfrac{C}{s+2}$

$$\Leftrightarrow s^2+1 = A(s-4)(s+2) + Bs(s+2) + Cs(s-4).$$

Áp dụng **Cách 1** (PP đồng nhất hệ số) hoặc **Cách 2** (Thay $s=0,\ s=4,\ s=-2$)

$$\Rightarrow A = -\frac{1}{8}, B = \frac{17}{24}, C = \frac{5}{12}.$$

Khi đó: $f(t) = -\dfrac{1}{8}\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s}\right\} + \dfrac{17}{24}\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s-4}\right\} + \dfrac{5}{12}\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s+2}\right\} = -\dfrac{1}{8} + \dfrac{17}{24}e^{4t} + \dfrac{5}{12}e^{-2t}.$

b) Ta có: $F(s) = \dfrac{s^2+2s}{(s^2+1)(s^2+4)} = \dfrac{As+B}{s^2+1} + \dfrac{Cs+D}{s^2+4}$

$$\Leftrightarrow s^2+2s = (A+C)s^3 + (B+D)s^2 + (4A+C)s + 4B + D$$

$\Leftrightarrow A = \dfrac{2}{3}, B = -\dfrac{1}{3}, C = -\dfrac{2}{3}, D = \dfrac{4}{3}$ (áp dụng PP đồng nhất hệ số)

Khi đó: $f(t) = \dfrac{2}{3}\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^2+1}\right\} - \dfrac{1}{3}\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2+1}\right\} - \dfrac{2}{3}\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^2+4}\right\} + \dfrac{2}{3}\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{2}{s^2+4}\right\}$

$$= \frac{2}{3}\cos t - \frac{1}{3}\sin t - \frac{2}{3}\cos 2t + \frac{2}{3}\sin 2t.$$

3. **Áp dụng giải PTVP tuyến tính cấp cao với hệ số là hằng số**
   - **Ví dụ:** Giải các PTVP với giá trị ban đầu sau đây:
     a) $x'' + 6x' + 34x = 30\sin 2t, \quad x(0) = x'(0) = 0.$
     b) $x^{(3)} + x'' - 6x' = 0, \quad x(0) = 0, x'(0) = x''(0) = 1.$
     c) $x^{(3)} - x'' - x' + x = e^{2t}, \quad x(0) = x'(0) = x''(0) = 0.$
     d) $x^{(4)} + 13x'' + 36x = 0,$
     $x(0) = 0, x'(0) = 2, x''(0) = 0, x^{(3)}(0) = -13.$
     e) $x^{(4)} + 8x'' - 9x = 0,$
     $x(0) = x'(0) = 0, x''(0) = x^{(3)}(0) = 1.$
     f) $x^{(6)} + 4x^{(4)} - x'' - 4x = \sinh 2t, \quad x^{(k)}(0) = 0$ với $k = \overline{0, 5}.$

Bài 3: Phép tịnh tiến và phân thức đơn giản

3. **Áp dụng giải PTVP tuyến tính cấp cao với hệ số là hằng số**
   - **Ví dụ:** Giải các PTVP với giá trị ban đầu sau đây:
     a) $x'' + 6x' + 34x = 30\sin 2t, \quad x(0) = x'(0) = 0.$
     b) $x^{(3)} + x'' - 6x' = 0, \quad x(0) = 0, x'(0) = x''(0) = 1.$
     c) $x^{(3)} - x'' - x' + x = e^{2t}, \quad x(0) = x'(0) = x''(0) = 0.$
     d) $x^{(4)} + 13x'' + 36x = 0,$
     $x(0) = 0, x'(0) = 2, x''(0) = 0, x^{(3)}(0) = -13.$
     e) $x^{(4)} + 8x'' - 9x = 0,$
     $x(0) = x'(0) = 0, x''(0) = x^{(3)}(0) = 1.$
     f) $x^{(6)} + 4x^{(4)} - x'' - 4x = \sinh 2t, \quad x^{(k)}(0) = 0$ với $k = \overline{0,5}.$
   - **Cách giải:**
     - **B1:** Đặt $F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}(s)$. Biến đổi Laplace 2 vế kết hợp với công thức biến đổi Laplace của đạo hàm và sử dụng điều kiện ban đầu để tính $F(s)$.
     - **B2:** Sử dụng quy tắc biến đổi phân thức đơn giản và phép tịnh tiến (nếu cần) để tìm Laplace ngược, tức là tìm ra nghiệm $f(t)$.

Bài 3: Phép tịnh tiến và phân thức đơn giản

Giải: b) Đặt $X(s) = \mathscr{L}\{x(t)\}(s)$, biến đổi Laplace 2 vế ta có:

$$\mathscr{L}\{x^{(3)}(t)\}(s) + \mathscr{L}\{x''(t)\}(s) - 6\mathscr{L}\{x'(t)\}(s) = 0$$

$$\Leftrightarrow \big(s^3X(s) - s^2x(0) - sx'(0) - x''(0)\big) + \big(s^2X(s) - sx(0) - x'(0)\big) - 6\big(sX(s) - x(0)\big) = 0$$

$$\Leftrightarrow (s^3 + s^2 - 6s)X(s) - s - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow X(s) = \frac{s+2}{s^3+s^2-6s} = \frac{s+2}{s(s+3)(s-2)}$$

Đặt $X(s) = \dfrac{A}{s} + \dfrac{B}{s+3} + \dfrac{C}{s-2} \Rightarrow A = -\dfrac{1}{3}, B = -\dfrac{1}{15}, C = \dfrac{2}{5}$

Khi đó: $x(t) = -\dfrac{1}{3}\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s}\right\} - \dfrac{1}{15}\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s+3}\right\} + \dfrac{2}{5}\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s-2}\right\} = -\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{15}e^{-3t} + \dfrac{2}{5}e^{2t}$.

Bài 3: Phép tịnh tiến và phân thức đơn giản

Giải: b) Đặt $X(s) = \mathscr{L}\{x(t)\}(s)$, biến đổi Laplace 2 vế ta có:

$$\mathscr{L}\{x^{(3)}(t)\}(s) + \mathscr{L}\{x''(t)\}(s) - 6\mathscr{L}\{x'(t)\}(s) = 0$$

$$\Leftrightarrow \big(s^3X(s) - s^2x(0) - sx'(0) - x''(0)\big) + \big(s^2X(s) - sx(0) - x'(0)\big) - 6\big(sX(s) - x(0)\big) = 0$$

$$\Leftrightarrow (s^3 + s^2 - 6s)X(s) - s - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow X(s) = \frac{s+2}{s^3+s^2-6s} = \frac{s+2}{s(s+3)(s-2)}$$

Đặt $X(s) = \dfrac{A}{s} + \dfrac{B}{s+3} + \dfrac{C}{s-2} \Rightarrow A = -\dfrac{1}{3}, B = -\dfrac{1}{15}, C = \dfrac{2}{5}$

Khi đó: $x(t) = -\dfrac{1}{3}\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s}\right\} - \dfrac{1}{15}\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s+3}\right\} + \dfrac{2}{5}\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s-2}\right\} = -\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{15}e^{-3t} + \dfrac{2}{5}e^{2t}.$

e) Đặt $X(s) = \mathscr{L}\{x(t)\}(s)$, biến đổi Laplace 2 vế ta có:

$$\mathscr{L}\{x^{(4)}(t)\}(s) + 8\mathscr{L}\{x''(t)\}(s) - 9\mathscr{L}\{x(t)\}(s) = 0$$

$$\Leftrightarrow \big(s^4X(s) - s^3x(0) - s^2x'(0) - sx''(0) - x^{(3)}(0)\big) + 8\big(s^2X(s) - sx(0) - x'(0)\big) - 9X(s) = 0$$

$$\Leftrightarrow (s^4 + 8s^2 - 9)X(s) - s - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow X(s) = \frac{s+1}{s^4+8s^2-9} = \frac{s+1}{(s^2-1)(s^2+9)} = \frac{1}{(s-1)(s^2+9)}$$

Bài 3: Phép tịnh tiến và phân thức đơn giản

Đặt $X(s) = \dfrac{A}{s-1} + \dfrac{Bs+C}{s^2+9} \Rightarrow A = \dfrac{1}{10}, B = C = -\dfrac{1}{10}$

Khi đó: $x(t) = \dfrac{1}{10}\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s-1}\right\} - \dfrac{1}{10}\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^2+9}\right\} - \dfrac{1}{30}\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{3}{s^2+9}\right\}$

$$= \frac{1}{10}e^t - \frac{1}{10}\cos 3t - \frac{1}{30}\sin 3t.$$

Đặt $X(s) = \dfrac{A}{s-1} + \dfrac{Bs+C}{s^2+9} \Rightarrow A = \dfrac{1}{10}, B = C = -\dfrac{1}{10}$

Khi đó: $$x(t) = \frac{1}{10}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} - \frac{1}{10}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+9}\right\} - \frac{1}{30}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s^2+9}\right\}$$
$$= \frac{1}{10}e^t - \frac{1}{10}\cos 3t - \frac{1}{30}\sin 3t.$$

3. **Chú ý** (Các kỹ thuật biến đổi bổ sung):

   a) $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{(s^2+k^2)^2}\right\} = \dfrac{1}{2k} t \sin kt.$

   b) $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s^2+k^2)^2}\right\} = \dfrac{1}{2k^3}(\sin kt - kt\cos kt).$

Bài 3: Phép tịnh tiến và phân thức đơn giản

Đặt $X(s) = \dfrac{A}{s-1} + \dfrac{Bs+C}{s^2+9} \Rightarrow A = \dfrac{1}{10}, B = C = -\dfrac{1}{10}$

Khi đó: $x(t) = \dfrac{1}{10}\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s-1}\right\} - \dfrac{1}{10}\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^2+9}\right\} - \dfrac{1}{30}\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{3}{s^2+9}\right\}$

$= \dfrac{1}{10}e^t - \dfrac{1}{10}\cos 3t - \dfrac{1}{30}\sin 3t.$

3. **Chú ý** (Các kỹ thuật biến đổi bổ sung):

   a) $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{(s^2+k^2)^2}\right\} = \dfrac{1}{2k}t\sin kt.$

   b) $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s^2+k^2)^2}\right\} = \dfrac{1}{2k^3}(\sin kt - kt\cos kt).$

   C/M: Theo Bài 2, ta đã chứng minh được

$$\mathscr{L}\{t\sin kt\}(s) = \frac{2ks}{(s^2+k^2)^2} \text{ và } \mathscr{L}\{t\cos kt\}(s) = \frac{s^2-k^2}{(s^2+k^2)^2}.$$

a) Đpcm $\Leftrightarrow \dfrac{s}{(s^2+k^2)^2} = \mathscr{L}\left\{\dfrac{1}{2k}t\sin kt\right\}(s) = \dfrac{1}{2k}\mathscr{L}\left\{t\sin kt\right\}(s)$. Điều này là đúng.

Bài 3: Phép tịnh tiến và phân thức đơn giản

b) Đpcm $\Leftrightarrow \dfrac{1}{(s^2+k^2)^2} = \mathscr{L}\left\{\dfrac{1}{2k^3}(\sin kt - kt\cos kt)\right\}(s)$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2k^3}\mathscr{L}\{\sin kt\}(s) - \frac{1}{2k^2}\mathscr{L}\{t\cos kt\}(s) \\
&= \frac{1}{2k^3}\frac{k}{s^2+k^2} - \frac{1}{2k^2}\frac{s^2-k^2}{(s^2+k^2)^2} \\
&= \frac{1}{2k^2}\left(\frac{1}{s^2+k^2} - \frac{s^2-k^2}{(s^2+k^2)^2}\right).
\end{aligned}
$$

Điều này là đúng.

b) Đpcm $\Leftrightarrow \dfrac{1}{(s^2+k^2)^2} = \mathscr{L}\left\{\dfrac{1}{2k^3}(\sin kt - kt\cos kt)\right\}(s)$

$$= \frac{1}{2k^3}\mathscr{L}\{\sin kt\}(s) - \frac{1}{2k^2}\mathscr{L}\{t\cos kt\}(s)$$

$$= \frac{1}{2k^3}\frac{k}{s^2+k^2} - \frac{1}{2k^2}\frac{s^2-k^2}{(s^2+k^2)^2}$$

$$= \frac{1}{2k^2}\left(\frac{1}{s^2+k^2} - \frac{s^2-k^2}{(s^2+k^2)^2}\right).$$ Điều này là đúng.

Ví dụ: Giải các PTVP sau:

a) $x'' + 9x = 2\sin 3t, \quad x(0) = x'(0) = 0.$

b) $x^{(4)} + 2x'' + x = 4te^t, \quad x(0) = x'(0) = x''(0) = x^{(3)}(0) = 0.$

b) Đpcm $\Leftrightarrow \dfrac{1}{(s^2+k^2)^2} = \mathscr{L}\left\{\dfrac{1}{2k^3}(\sin kt - kt\cos kt)\right\}(s)$

$$= \frac{1}{2k^3}\mathscr{L}\{\sin kt\}(s) - \frac{1}{2k^2}\mathscr{L}\{t\cos kt\}(s)$$

$$= \frac{1}{2k^3}\frac{k}{s^2+k^2} - \frac{1}{2k^2}\frac{s^2-k^2}{(s^2+k^2)^2}$$

$$= \frac{1}{2k^2}\left(\frac{1}{s^2+k^2} - \frac{s^2-k^2}{(s^2+k^2)^2}\right).$$ Điều này là đúng.

Ví dụ: Giải các PTVP sau:

a) $x'' + 9x = 2\sin 3t, \quad x(0) = x'(0) = 0.$

b) $x^{(4)} + 2x'' + x = 4te^t, \quad x(0) = x'(0) = x''(0) = x^{(3)}(0) = 0.$

Gợi ý: a) Biến đổi Laplace 2 vế tính được $X(s) = \dfrac{6}{(s^2+9)^2} \Rightarrow x(t) = \dfrac{1}{9}\sin 3t - \dfrac{1}{3}t\cos 3t.$

b) Biến đổi Laplace 2 vế tính được $X(s) = \dfrac{4}{(s-1)^2(s^2+1)^2}$. Để tính nghiệm $x(t)$, **Cách 1:** Phân tích

$X(s) = \dfrac{A}{s-1} + \dfrac{B}{(s-1)^2} + \dfrac{Cs+D}{s^2+1} + \dfrac{Es+F}{(s^2+1)^2}$ hoặc **Cách 2:** Sử dụng công thức tích chập bài sau.

Bài 4:

ĐẠO HÀM, TÍCH PHÂN VÀ TÍCH CỦA CÁC PHÉP BIẾN ĐỔI

Bài 4: Đạo hàm, tích phân và tích của các phép biến đổi

I. Tích chập của hai hàm số

1. **Định nghĩa:** Tích chập của hai hàm số $f(t)$ và $g(t)$, xác định trên $[0, \infty)$ và liên tục từng khúc trên mỗi đoạn hữu hạn, được ký hiệu là $(f * g)(t)$ hoặc $f(t) * g(t)$ và được xác định bởi

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(r)g(t-r)dr, \qquad \text{với } t \geq 0.$$

Chú ý: Tích chập có tính chất giao hoán $f(t) * g(t) = g(t) * f(t)$.

Ví dụ: a) $\sin t * \cos t$ b) $t * e^{at}$ c) $t^2 * \cos t$.

Bài 4: Đạo hàm, tích phân và tích của các phép biến đổi

I. Tích chập của hai hàm số

1. **Định nghĩa:** Tích chập của hai hàm số $f(t)$ và $g(t)$, xác định trên $[0, \infty)$ và liên tục từng khúc trên mỗi đoạn hữu hạn, được ký hiệu là $(f * g)(t)$ hoặc $f(t) * g(t)$ và được xác định bởi

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(r)g(t-r)dr, \quad \text{với } t \geq 0.$$

Chú ý: Tích chập có tính chất giao hoán $f(t) * g(t) = g(t) * f(t)$.

Ví dụ: a) $\sin t * \cos t$ b) $t * e^{at}$ c) $t^2 * \cos t$.

Giải: a) Ta có:

$$\sin t * \cos t = \int_0^t \sin r \cos(t-r)dr = \frac{1}{2}\int_0^t \big(\sin t + \sin(2r-t)\big)dr$$

$$= \frac{1}{2}\left((\sin t).r\Big|_0^t - \frac{1}{2}\cos(2r-t)\Big|_0^t\right) = \frac{1}{2}t\sin t.$$

Bài 4: Đạo hàm, tích phân và tích của các phép biến đổi

I. Tích chập của hai hàm số

1. **Định nghĩa:** Tích chập của hai hàm số $f(t)$ và $g(t)$, xác định trên $[0, \infty)$ và liên tục từng khúc trên mỗi đoạn hữu hạn, được ký hiệu là $(f * g)(t)$ hoặc $f(t) * g(t)$ và được xác định bởi

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(r)g(t-r)dr, \quad \text{với } t \geq 0.$$

Chú ý: Tích chập có tính chất giao hoán $f(t) * g(t) = g(t) * f(t)$.

Ví dụ: a) $\sin t * \cos t$ b) $t * e^{at}$ c) $t^2 * \cos t$.

Giải: a) Ta có:

$$\sin t * \cos t = \int_0^t \sin r \cos(t-r)dr = \frac{1}{2}\int_0^t \big(\sin t + \sin(2r-t)\big)dr$$
$$= \frac{1}{2}\left((\sin t).r\Big|_0^t - \frac{1}{2}\cos(2r-t)\Big|_0^t\right) = \frac{1}{2}t\sin t.$$

2. **Định lý** (Biến đổi Laplace của tích chập): Nếu các hàm $f(t)$ và $g(t)$ thỏa mãn giả thiết
   i) liên tục từng khúc trên mỗi đoạn hữu hạn của $[0, \infty)$,
   ii) là hàm bị chặn mũ trên $[0, \infty)$,

thì
$$\mathscr{L}\{f(t)*g(t)\}(s)=\mathscr{L}\{f(t)\}(s).\mathscr{L}\{g(t)\}(s)=F(s).G(s),$$
tức là
$$\mathscr{L}^{-1}\{F(s).G(s)\}=f(t)*g(t).$$

Ví dụ: a) $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{2}{(s-1)(s^2+4)}\right\}$ b) $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s(s^2+4s+5)}\right\}$.

thì
$$\mathscr{L}\{f(t) * g(t)\}(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}(s).\mathscr{L}\{g(t)\}(s) = F(s).G(s),$$
tức là
$$\mathscr{L}^{-1}\{F(s).G(s)\} = f(t) * g(t).$$

Ví dụ: a) $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{2}{(s-1)(s^2+4)}\right\}$ b) $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s(s^2+4s+5)}\right\}$.

Giải: a) $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{2}{(s-1)(s^2+4)}\right\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s-1}.\dfrac{2}{s^2+4}\right\} \Rightarrow \begin{cases} F(s) = \dfrac{1}{s-1} \\ G(s) = \dfrac{2}{s^2+4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(t) = e^t \\ g(t) = \sin 2t. \end{cases}$

Khi đó: $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{2}{(s-1)(s^2+4)}\right\} = f(t) * g(t) = \cdots = \dfrac{2}{5}e^t - \dfrac{2}{5}\cos 2t - \dfrac{1}{5}\sin 2t.$

b)
$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+4s+5)}\right\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}.\frac{1}{s^2+4s+5}\right\} \Rightarrow \begin{cases} F(s) = \dfrac{1}{s} \\ G(s) = \dfrac{1}{s^2+4s+5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(t) = 1 \\ g(t) = e^{-2t}\sin t. \end{cases}$$

Khi đó: $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s(s^2+4s+5)}\right\} = f(t) * g(t) = \cdots = \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{5}e^{-2t}\cos t - \dfrac{2}{5}e^{-2t}\sin t.$

II. Đạo hàm, tích phân của biến đổi Laplace

1. **Định lý 1:** (Đạo hàm của biến đổi Laplace)
   Nếu hàm $f(t)$ thỏa mãn giả thiết
   i) liên tục từng khúc trên $[0, \infty)$,
   ii) là hàm bị chặn mũ trên $[0, \infty)$, tức là tồn tại các hằng số không âm M và α sao cho
   $|f(t)| \leq Me^{\alpha t}$ với mọi $t \geq 0$,

   thì
   $$F'(s) = -\mathscr{L}\{tf(t)\}(s), \text{ tức là } \mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} = -\frac{1}{t}\mathscr{L}^{-1}\{F'(s)\}$$
   và tổng quát
   $$F^{(n)}(s) = (-1)^n\mathscr{L}\{t^n f(t)\}(s), \text{ tức là } \mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{(-1)^n}{t^n}\mathscr{L}^{-1}\{F^{(n)}(s)\}$$
   với $s > \alpha$ và $F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}(s)$.

II. Đạo hàm, tích phân của biến đổi Laplace

1. **Định lý 1:** (Đạo hàm của biến đổi Laplace)
   Nếu hàm $f(t)$ thỏa mãn giả thiết
   i) liên tục từng khúc trên $[0, \infty)$,
   ii) là hàm bị chặn mũ trên $[0, \infty)$, tức là tồn tại các hằng số không âm M và α sao cho
   $|f(t)| \leq Me^{\alpha t}$ với mọi $t \geq 0$,

   thì
   $$F'(s) = -\mathscr{L}\{tf(t)\}(s), \text{ tức là } \mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} = -\frac{1}{t}\mathscr{L}^{-1}\{F'(s)\}$$
   và tổng quát
   $$F^{(n)}(s) = (-1)^n\mathscr{L}\{t^n f(t)\}(s), \text{ tức là } \mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{(-1)^n}{t^n}\mathscr{L}^{-1}\{F^{(n)}(s)\}$$
   với $s > \alpha$ và $F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}(s)$.

   C/M: Ta có $F(s) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt \Rightarrow F'(s) = \frac{d}{ds}\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt = \int_0^\infty \frac{d}{ds}(e^{-st}f(t))dt$
   $= -\displaystyle\int_0^\infty e^{-st}(tf(t))dt = -\mathscr{L}\{tf(t)\}(s)$. Tương tự chứng minh cho $F^{(n)}(s)$.

Bài 4: Đạo hàm, tích phân và tích của các biến đổi

Ví dụ: a) $\mathscr{L}\{t^2\cos 2t\}$ b) $\mathscr{L}\{t^2\sin kt\}$ c) $\mathscr{L}\{te^{-t}\sin^2 t\}$.

Giải: a) Đặt $F(s) = \mathscr{L}\{\cos 2t\}(s) = \dfrac{s}{s^2+4} \Rightarrow F''(s) = (-1)^2\mathscr{L}\{t^2\cos 2t\}(s)$

$\Rightarrow \mathscr{L}\{t^2\cos 2t\}(s) = F''(s) = \dfrac{2s^3-24s}{(s^2+4)^3}$. Tương tự cho câu b) và c).

Ví dụ: a) $\mathscr{L}\{t^2\cos 2t\}$ b) $\mathscr{L}\{t^2\sin kt\}$ c) $\mathscr{L}\{te^{-t}\sin^2 t\}$.

Giải: a) Đặt $F(s) = \mathscr{L}\{\cos 2t\}(s) = \dfrac{s}{s^2+4} \Rightarrow F''(s) = (-1)^2\mathscr{L}\{t^2\cos 2t\}(s)$

$\Rightarrow \mathscr{L}\{t^2\cos 2t\}(s) = F''(s) = \dfrac{2s^3-24s}{(s^2+4)^3}$. Tương tự cho câu b) và c).

2. **Một số bài toán áp dụng**

- **Ví dụ 1:** (Giải PTVP tuyến tính thuần nhất cấp 2 với hệ số là hàm số)

  a) $tx'' + (t-2)x' + x = 0, \quad x(0) = 0.$
  b) $tx'' + (3t-1)x' + 3x = 0, \quad x(0) = 0.$
  c) $tx'' + 2(t-1)x' - 2x = 0, \quad x(0) = 0.$
  d) $tx'' + (4t-3)x' + 4x = 0, \quad x(0) = 0.$

Bài 4: Đạo hàm, tích phân và tích của các biến đổi

Ví dụ: a) $\mathscr{L}\{t^2\cos 2t\}$ b) $\mathscr{L}\{t^2\sin kt\}$ c) $\mathscr{L}\{te^{-t}\sin^2 t\}$.

Giải: a) Đặt $F(s) = \mathscr{L}\{\cos 2t\}(s) = \dfrac{s}{s^2+4} \Rightarrow F''(s) = (-1)^2\mathscr{L}\{t^2\cos 2t\}(s)$

$\Rightarrow \mathscr{L}\{t^2\cos 2t\}(s) = F''(s) = \dfrac{2s^3-24s}{(s^2+4)^3}$. Tương tự cho câu b) và c).

2. **Một số bài toán áp dụng**

- **Ví dụ 1:** (Giải PTVP tuyến tính thuần nhất cấp 2 với hệ số là hàm số)
  a) $tx'' + (t-2)x' + x = 0, \quad x(0) = 0.$
  b) $tx'' + (3t-1)x' + 3x = 0, \quad x(0) = 0.$
  c) $tx'' + 2(t-1)x' - 2x = 0, \quad x(0) = 0.$
  d) $tx'' + (4t-3)x' + 4x = 0, \quad x(0) = 0.$

Giải: b) Biến đổi Laplace 2 vế ta có:

$$\mathscr{L}\{tx''(t)\}(s) + 3\mathscr{L}\{tx'(t)\}(s) - \mathscr{L}\{x'(t)\}(s) + 3\mathscr{L}\{x(t)\}(s) = 0 \quad (*)$$

Đặt $X(s) = \mathscr{L}\{x(t)\}(s)$, ta có:

$$\mathscr{L}\{x'(t)\}(s) = sX(s) - x(0) = sX(s) \Rightarrow \mathscr{L}\{tx'(t)\}(s) = -\big(sX(s)\big)' = -X(s) - sX'(s)$$

và $\quad \mathscr{L}\{x''(t)\}(s) = s^2X(s) - sx(0) - x'(0) = s^2X(s) - x'(0)$

$$\Rightarrow \mathscr{L}\{tx''(t)\}(s) = -\big(s^2X(s) - x'(0)\big)' = -2sX(s) - s^2X'(s).$$

Thay vào $(*)$ ta có:

$$-2sX(s) - s^2X'(s) + 3\big(-X(s) - sX'(s)\big) - sX(s) + 3X(s) = 0$$

$$\Leftrightarrow (s^2 + 3s)X'(s) + 3sX(s) = 0 \Leftrightarrow (s+3)X'(s) + 3X(s) = 0.$$

PT trên là PT phân ly biến số, ta tính được nghiệm $X(s) = \dfrac{C}{(s+3)^3}$ với $C \neq 0$.

Khi đó: Nghiệm của phương trình đã cho là $x(t) = \dfrac{C}{2}\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{2!}{(s+3)^3}\right\} = Ke^{-3t}t^2$.

và $\quad \mathscr{L}\{x''(t)\}(s) = s^2X(s) - sx(0) - x'(0) = s^2X(s) - x'(0)$

$$\Rightarrow \mathscr{L}\{tx''(t)\}(s) = -\big(s^2X(s) - x'(0)\big)' = -2sX(s) - s^2X'(s).$$

Thay vào $(*)$ ta có:

$$-2sX(s) - s^2X'(s) + 3\big(-X(s) - sX'(s)\big) - sX(s) + 3X(s) = 0$$

$$\Leftrightarrow (s^2+3s)X'(s) + 3sX(s) = 0 \Leftrightarrow (s+3)X'(s) + 3X(s) = 0.$$

PT trên là PT phân ly biến số, ta tính được nghiệm $X(s) = \dfrac{C}{(s+3)^3}$ với $C \neq 0$.

Khi đó: Nghiệm của phương trình đã cho là $x(t) = \dfrac{C}{2}\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{2!}{(s+3)^3}\right\} = Ke^{-3t}t^2$.

- **Ví dụ 2:** Tìm các biến đổi Laplace ngược sau đây:

a) $\mathscr{L}^{-1}\left\{\arctan\dfrac{1}{s}\right\}$ $\qquad$ b) $\mathscr{L}^{-1}\left\{\text{arccot}\dfrac{1}{s}\right\}$

c) $\mathscr{L}^{-1}\left\{\ln\dfrac{s^2+1}{s^2+4}\right\}$ $\qquad$ d) $\mathscr{L}^{-1}\left\{\arctan\dfrac{3}{s+2}\right\}$.

và $\quad \mathscr{L}\{x''(t)\}(s) = s^2X(s) - sx(0) - x'(0) = s^2X(s) - x'(0)$

$$\Rightarrow \mathscr{L}\{tx''(t)\}(s) = -\big(s^2X(s) - x'(0)\big)' = -2sX(s) - s^2X'(s).$$

Thay vào $(*)$ ta có:

$$-2sX(s) - s^2X'(s) + 3\big(-X(s) - sX'(s)\big) - sX(s) + 3X(s) = 0$$

$$\Leftrightarrow (s^2+3s)X'(s) + 3sX(s) = 0 \Leftrightarrow (s+3)X'(s) + 3X(s) = 0.$$

PT trên là PT phân ly biến số, ta tính được nghiệm $X(s) = \dfrac{C}{(s+3)^3}$ với $C \neq 0$.

Khi đó: Nghiệm của phương trình đã cho là $x(t) = \dfrac{C}{2}\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{2!}{(s+3)^3}\right\} = Ke^{-3t}t^2$.

- **Ví dụ 2:** Tìm các biến đổi Laplace ngược sau đây:

a) $\mathscr{L}^{-1}\left\{\arctan\dfrac{1}{s}\right\}$ b) $\mathscr{L}^{-1}\left\{\text{arccot}\dfrac{1}{s}\right\}$

c) $\mathscr{L}^{-1}\left\{\ln\dfrac{s^2+1}{s^2+4}\right\}$ d) $\mathscr{L}^{-1}\left\{\arctan\dfrac{3}{s+2}\right\}$.

Giải: c) Đặt $F(s) = \ln\dfrac{s^2+1}{s^2+4} = \ln(s^2+1) - \ln(s^2+4)$ ta có:

Bài 4: Đạo hàm, tích phân và tích của các phép biến đổi

$$f(t) = -\frac{1}{t}\mathscr{L}^{-1}\{F'(s)\} = -\frac{1}{t}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2s}{s^2+1} - \frac{2s}{s^2+4}\right\} = \frac{2}{t}(\cos 2t - \cos t)$$

Bài 4: Đạo hàm, tích phân và tích của các phép biến đổi

$$f(t) = -\frac{1}{t}\mathscr{L}^{-1}\{F'(s)\} = -\frac{1}{t}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2s}{s^2+1} - \frac{2s}{s^2+4}\right\} = \frac{2}{t}(\cos 2t - \cos t)$$

3. **Định lý 2:** (Tích phân của biến đổi Laplace)
   Nếu hàm $f(t)$ thỏa mãn giả thiết
   i) liên tục từng khúc trên $[0,\infty)$ và $\exists \lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{f(t)}{t}$,
   ii) là hàm bị chặn mũ trên $[0,\infty)$, tức là tồn tại các hằng số không âm M và α sao cho $|f(t)| \le Me^{\alpha t}$ với mọi $t \ge 0$,

   thì

$$\mathscr{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}(s) = \int_s^\infty F(\lambda)d\lambda, \text{ tức là } f(t) = t\mathscr{L}^{-1}\left\{\int_s^\infty F(\lambda)d\lambda\right\}$$

   với $s > \alpha$ và $F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}(s)$.

$$f(t) = -\frac{1}{t}\mathscr{L}^{-1}\{F'(s)\} = -\frac{1}{t}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2s}{s^2+1} - \frac{2s}{s^2+4}\right\} = \frac{2}{t}(\cos 2t - \cos t)$$

3. **Định lý 2:** (Tích phân của biến đổi Laplace)
   Nếu hàm $f(t)$ thỏa mãn giả thiết
   - i) liên tục từng khúc trên $[0, \infty)$ và $\exists \lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{f(t)}{t}$,
   - ii) là hàm bị chặn mũ trên $[0, \infty)$, tức là tồn tại các hằng số không âm M và α sao cho $|f(t)| \leq Me^{\alpha t}$ với mọi $t \geq 0$,

   thì
   $$\mathscr{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}(s) = \int_s^{\infty} F(\lambda)d\lambda, \text{ tức là } f(t) = t\mathscr{L}^{-1}\left\{\int_s^{\infty} F(\lambda)d\lambda\right\}$$
   với $s > \alpha$ và $F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}(s)$.

C/M: Ta có $\mathcal{I} = \int_s^{\infty} F(\lambda)d\lambda = \int_s^{\infty}\left(\int_0^{\infty} e^{-\lambda t} f(t)dt\right)d\lambda$. Đổi thứ tự tích phân ta có:

$$\mathcal{I} = \int_0^{\infty} \left(\int_s^{\infty} e^{-\lambda t} f(t) d\lambda \right) dt = -\int_0^{\infty} f(t) \left(\frac{e^{-\lambda t}}{t} \Bigg|_{\lambda=s}^{\lambda=\infty} \right) dt$$

$$= -\int_0^{\infty} f(t) \left(0 - \frac{e^{-st}}{t} \right) dt = \int_0^{\infty} e^{-st} \frac{f(t)}{t} dt = \mathscr{L}\left\{ \frac{f(t)}{t} \right\}(s).$$

Ví dụ: a) $\mathscr{L}\left\{ \frac{\sinh t}{t} \right\}$ b) $\mathscr{L}\left\{ \frac{1 - \cos 2t}{t} \right\}$ c) $\mathscr{L}^{-1}\left\{ \frac{s}{(s^2+1)^3} \right\}$.

Bài 4: Đạo hàm, tích phân và tích của các phép biến đổi

$$\mathcal{I} = \int_0^\infty \left(\int_s^\infty e^{-\lambda t} f(t) d\lambda \right) dt = -\int_0^\infty f(t) \left(\frac{e^{-\lambda t}}{t} \Bigg|_{\lambda=s}^{\lambda=\infty} \right) dt$$

$$= -\int_0^\infty f(t) \left(0 - \frac{e^{-st}}{t} \right) dt = \int_0^\infty e^{-st} \frac{f(t)}{t} dt = \mathscr{L}\left\{ \frac{f(t)}{t} \right\}(s).$$

Ví dụ: a) $\mathscr{L}\left\{ \frac{\sinh t}{t} \right\}$ b) $\mathscr{L}\left\{ \frac{1-\cos 2t}{t} \right\}$ c) $\mathscr{L}^{-1}\left\{ \frac{s}{(s^2+1)^3} \right\}$.

Giải: a) Ta có $F(s) = \mathscr{L}\{\sinh t\}(s) = \dfrac{1}{s^2-1}$ (ĐK: $s > 1$). Khi đó:

$$\mathscr{L}\left\{ \frac{\sinh t}{t} \right\}(s) = \int_s^\infty F(\lambda) d\lambda = \int_s^\infty \frac{1}{\lambda^2 - 1} d\lambda$$

$$= \frac{1}{2} \int_s^\infty \left(\frac{1}{\lambda - 1} - \frac{1}{\lambda + 1} \right) d\lambda = \frac{1}{2} \ln \frac{|\lambda - 1|}{|\lambda + 1|} \Bigg|_s^\infty$$

$$= \frac{1}{2} \left(\lim_{\lambda \to \infty} \ln \frac{|\lambda - 1|}{|\lambda + 1|} - \ln \frac{|s-1|}{|s+1|} \right) = -\frac{1}{2} \ln \frac{|s-1|}{|s+1|} = \frac{1}{2} \ln \frac{s+1}{s-1} \text{ do } s > 1.$$

Bài 4: Đạo hàm, tích phân và tích của các phép biến đổi

III. Biến đổi Laplace của hàm liên tục từng khúc

1. **Định nghĩa:** Hàm bậc thang (Heaviside) tại $t = a$ được ký hiệu là $u_a(t)$ và được xác định bởi

$$u_a(t) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } t < a \\ 1 & \text{nếu } t \geq a \end{cases}, \quad \text{hoặc ta cũng viết } u_a(t) = u(t-a).$$

III. Biến đổi Laplace của hàm liên tục từng khúc

1. **Định nghĩa:** Hàm bậc thang (Heaviside) tại $t = a$ được ký hiệu là $u_a(t)$ và được xác định bởi
$$u_a(t) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } t < a \\ 1 & \text{nếu } t \geq a \end{cases}, \quad \text{hoặc ta cũng viết } u_a(t) = u(t-a).$$

2. **Định lý:** Nếu $F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}(s)$ tồn tại với mọi $s > \alpha$, thì $\mathscr{L}\{u(t-a)f(t-a)\}(s)$ tồn tại với mọi $s > \alpha + a$ và
$$\mathscr{L}\{u(t-a)f(t-a)\}(s) = e^{-as}F(s),$$
tức là
$$u(t-a)f(t-a) = \mathscr{L}^{-1}\{e^{-as}F(s)\}.$$

III. Biến đổi Laplace của hàm liên tục từng khúc

1. **Định nghĩa:** Hàm bậc thang (Heaviside) tại $t = a$ được ký hiệu là $u_a(t)$ và được xác định bởi
$$u_a(t) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } t < a \\ 1 & \text{nếu } t \geq a \end{cases}, \quad \text{hoặc ta cũng viết } u_a(t) = u(t-a).$$

2. **Định lý:** Nếu $F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}(s)$ tồn tại với mọi $s > \alpha$, thì $\mathscr{L}\big\{u(t-a)f(t-a)\big\}(s)$ tồn tại với mọi $s > \alpha + a$ và
$$\mathscr{L}\big\{u(t-a)f(t-a)\big\}(s) = e^{-as}F(s),$$
tức là
$$u(t-a)f(t-a) = \mathscr{L}^{-1}\big\{e^{-as}F(s)\big\}.$$

C/M: Ta có VT$= e^{-as}F(s) = e^{-as}\displaystyle\int_0^\infty e^{-s\lambda}f(\lambda)d\lambda = \int_0^\infty e^{-s(\lambda+a)}f(\lambda)d\lambda.$

Đặt $t = \lambda + a \Rightarrow$ VT$= \displaystyle\int_a^\infty e^{-st}f(t-a)dt$. Ta thấy: $u(t-a)f(t-a) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } t < a \\ f(t-a) & \text{nếu } t \geq a. \end{cases}$

Bài 4: Đạo hàm, tích phân và tích của các phép biến đổi

$\Rightarrow$ VT$= \displaystyle\int_a^{\infty} e^{-st}u(t-a)f(t-a)dt = \int_0^{\infty} e^{-st}u(t-a)f(t-a)dt = \mathscr{L}\{u(t-a)f(t-a)\}(s)$.

Ví dụ: Tìm $\mathscr{L}\{g(t)\}(s)$ biết

a) $g(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < 2\pi \\ \cos 2t, & t \ge 2\pi \end{cases}$ b) $g(t) = \begin{cases} t, & 0 \le t \le 1 \\ 0, & t > 1 \end{cases}$

Bài 4: Đạo hàm, tích phân và tích của các phép biến đổi

$\Rightarrow$ VT$= \displaystyle\int_a^{\infty} e^{-st}u(t-a)f(t-a)dt = \int_0^{\infty} e^{-st}u(t-a)f(t-a)dt = \mathscr{L}\{u(t-a)f(t-a)\}(s).$

Ví dụ: Tìm $\mathscr{L}\{g(t)\}(s)$ biết

a) $g(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < 2\pi \\ \cos 2t, & t \ge 2\pi \end{cases}$ b) $g(t) = \begin{cases} t, & 0 \le t \le 1 \\ 0, & t > 1 \end{cases}$

Giải: a) Ta có: $g(t) = u(t-2\pi)\cos 2t = u(t-2\pi)\cos 2(t-2\pi)$.

Khi đó: $\mathscr{L}\{g(t)\}(s) = \mathscr{L}\{u(t-2\pi)\cos 2(t-2\pi)\}(s) = e^{-2\pi s}\mathscr{L}\{\cos 2t\}(s) = e^{-2\pi s}.\dfrac{s}{s^2+4}$

Bài 4: Đạo hàm, tích phân và tích của các phép biến đổi

$\Rightarrow$ VT$= \displaystyle\int_a^{\infty} e^{-st}u(t-a)f(t-a)dt = \int_0^{\infty} e^{-st}u(t-a)f(t-a)dt = \mathscr{L}\{u(t-a)f(t-a)\}(s).$

Ví dụ: Tìm $\mathscr{L}\{g(t)\}(s)$ biết

a) $g(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < 2\pi \\ \cos 2t, & t \ge 2\pi \end{cases}$ b) $g(t) = \begin{cases} t, & 0 \le t \le 1 \\ 0, & t > 1 \end{cases}$

Giải: a) Ta có: $g(t) = u(t-2\pi)\cos 2t = u(t-2\pi)\cos 2(t-2\pi)$.

Khi đó: $\mathscr{L}\{g(t)\}(s) = \mathscr{L}\{u(t-2\pi)\cos 2(t-2\pi)\}(s) = e^{-2\pi s}\mathscr{L}\{\cos 2t\}(s) = e^{-2\pi s}.\dfrac{s}{s^2+4}$

b) Ta có: $g(t) = \big(1-u(t-1)\big)t = t - tu(t-1)$.

Khi đó: $\mathscr{L}\{g(t)\}(s) = \mathscr{L}\{t\}(s) - \mathscr{L}\{u(t-1)t\}(s)$

$$= \frac{1}{s^2} - \mathscr{L}\{u(t-1)(t-1)\}(s) - \mathscr{L}\{u(t-1).1\}(s)$$

$$= \frac{1}{s^2} - e^{-s}\mathscr{L}\{t\}(s) - e^{-s}\mathscr{L}\{1\}(s)\frac{1}{s^2} - e^{-s}\left(\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s}\right) = \frac{1-e^{-s}(s+1)}{s^2}.$$

Bài 4: Đạo hàm, tích phân và tích của các phép biến đổi

3. **Áp dụng giải bài toán giá trị ban đầu:** Giải các PTVP

a) $\begin{cases} x'' + 9x = f(t) \\ x(0) = x'(0) = 0 \end{cases}$ với $f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < \pi \\ 0, & t \geq \pi. \end{cases}$

b) $\begin{cases} x'' + 2x' + 5x = f(t) \\ x(0) = x'(0) = 0 \end{cases}$ với $f(t) = \begin{cases} 20\cos t, & 0 \leq t < 2\pi \\ 0, & t \geq 2\pi. \end{cases}$

c) $\begin{cases} x'' + x = f(t) \\ x(0) = x'(0) = 0 \end{cases}$ với $f(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq 1 \\ 0, & t > 1. \end{cases}$

3. **Áp dụng giải bài toán giá trị ban đầu:** Giải các PTVP

a) $\begin{cases} x'' + 9x = f(t) \\ x(0) = x'(0) = 0 \end{cases}$ với $f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < \pi \\ 0, & t \ge \pi. \end{cases}$

b) $\begin{cases} x'' + 2x' + 5x = f(t) \\ x(0) = x'(0) = 0 \end{cases}$ với $f(t) = \begin{cases} 20\cos t, & 0 \le t < 2\pi \\ 0, & t \ge 2\pi. \end{cases}$

c) $\begin{cases} x'' + x = f(t) \\ x(0) = x'(0) = 0 \end{cases}$ với $f(t) = \begin{cases} t, & 0 \le t \le 1 \\ 0, & t > 1. \end{cases}$

Giải: a) Ta thấy: $f(t) = 1 - u(t-\pi)$. Biến đổi Laplace 2 vế ta được

$$\mathscr{L}\{x''(t)\}(s) + 9\mathscr{L}\{x(t)\}(s) = \mathscr{L}\{1\}(s) - \mathscr{L}\{u(t-\pi).1\}(s)$$

$$\Leftrightarrow s^2X(s) - sx(0) - x'(0) + 9X(s) = \frac{1}{s} - e^{-\pi s}.\frac{1}{s} \Leftrightarrow X(s) = \frac{1}{s(s^2+9)} - e^{-\pi s}.\frac{1}{s(s^2+9)}$$

Đặt $F(s) = \dfrac{1}{s(s^2+9)} = \dfrac{1}{9}\left(\dfrac{1}{s} - \dfrac{s}{s^2+9}\right) \Rightarrow f(t) = \mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} = \dfrac{1}{9}(1 - \cos 3t)$.

Khi đó: $x(t) = \mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} - \mathscr{L}^{-1}\{e^{-\pi s}F(s)\} = f(t) - u(t-\pi)f(t-\pi)$

$$= \frac{1}{9}(1-\cos 3t) - \frac{1}{9}u(t-\pi)\big(1 - \cos 3(t-\pi)\big) = \frac{1}{9}(1-\cos 3t) - \frac{1}{9}u(t-\pi)\big(1 + \cos 3t\big).$$

The end

Chúc các em học tốt!