

BÀI TẬP THAM KHẢO GIẢI TÍCH II
Nhóm ngành 2 Mã học phần: MI 1122

Chương 1

Hàm số nhiều biến số

Bài 1. Tìm miền xác định của các hàm số sau:

a) $z = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}}$ c) $z = \arcsin \frac{y-1}{x}$
b) $z = \sqrt{(x^2 + y^2 - 1)(4 - x^2 - y^2)}$ d) $z = \sqrt{x \sin y}$

Bài 2. Tìm giới hạn (nếu có) của các hàm số sau:

a) $f(x, y) = \frac{y^4}{x^4 + y^2}, \quad (x \rightarrow 0, y \rightarrow 0)$
b) $f(x, y) = \frac{y^2}{x^2 + 3xy}, \quad (x \rightarrow \infty, y \rightarrow \infty)$
c) $f(x, y) = \frac{1 - \cos \sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2}, \quad (x \rightarrow 0, y \rightarrow 0)$
d) $f(x, y) = \frac{x(e^y - 1) - y(e^x - 1)}{x^2 + y^2}, \quad (x \rightarrow 0, y \rightarrow 0)$

Bài 3. Tính các đạo hàm riêng của các hàm số sau:

a) $z = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$ c) $z = x^{y^3}, (x > 0)$
b) $z = y^2 \sin \frac{x}{y}$ d) $u = e^{\frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}}$

Bài 4. Khảo sát sự liên tục của hàm số và sự tồn tại các đạo hàm riêng của nó

a) $f(x, y) = \begin{cases} x \arctan \left(\frac{y}{x} \right)^2, & \text{nếu } x \neq 0 \\ 0, & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$
b) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x \sin y - y \sin x}{x^2 + y^2}, & \text{nếu } (x, y) \neq (0; 0) \\ 0, & \text{nếu } (x, y) = (0; 0) \end{cases}$

Bài 5. Giả sử $z = yf(x^2 - y^2)$, trong đó f là hàm số khả vi. Chứng minh rằng đối với hàm số z hệ thức sau luôn thỏa mãn

$$\frac{1}{x}z_x' + \frac{1}{y}z_y' = \frac{z}{y^2}.$$

Bài 6. Tìm đạo hàm riêng các hàm số hợp sau:

a) $z = e^{u^2 - 2v^2}, u = \cos x, v = \sqrt{x^2 + y^2}$

b) $z = \ln(u^2 + v^2), u = xy, v = \frac{x}{y}$

c) $z = \arcsin(x - y), x = 3t, y = 4t^3$

Bài 7. Cho f là hàm số khả vi đến cấp hai trên \mathbb{R} . Chứng minh rằng hàm số $\omega(x, t) = f(x - 3t)$ thỏa mãn phương trình truyền sóng $\frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} = 9 \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}$.

Bài 8. Tìm vi phân toàn phần của các hàm số sau:

a) $z = \sin(x^2 + y^3)$

c) $z = \arctan \frac{x + y}{x - y}$

b) $z = \ln \tan \frac{y}{x}$

d) $u = x^{y^2 z}$

Bài 9. Tính gần đúng

a) $A = \sqrt{(2, 02)^3 + e^{0,03}}$

b) $B = (1, 02)^{1,01}$

Bài 10. Tìm đạo hàm, đạo hàm riêng của các hàm số ẩn xác định bởi các phương trình sau:

a) $x^3 y - y^3 x = a^4$, tính y'

b) $x^2 + y + z^3 + e^z = 0$, tính z_x', z_y'

c) $\arctan \frac{x + y}{a} = \frac{y}{a}$, tính y'

d) $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0$, tính z_x', z_y'

Bài 11. Cho hàm số ẩn $z = z(x, y)$ xác định bởi phương trình $2x^2 y + 4y^2 + x^2 z + z^3 = 3$. Tính $\frac{\partial z}{\partial x}(0; 1), \frac{\partial z}{\partial y}(0; 1)$.

Bài 12. Cho $u = \frac{x + z}{y + z}$, tính u_x', u_y' biết rằng z là hàm số ẩn của x, y xác định bởi phương trình $ze^z = xe^x + ye^y$.

Bài 13. Phương trình $z^2 + \frac{2}{x} = \sqrt{y^2 - z^2}$, xác định hàm ẩn $z = z(x, y)$. Chứng minh rằng

$$x^2 z_x' + \frac{1}{y} z_y' = \frac{1}{z}.$$

Bài 14. Tính các đạo hàm riêng cấp hai của hàm số sau:

a) $z = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2 + y^2)^3}$

c) $z = \arctan \frac{y}{x}$

b) $z = x^2 \ln(x + y)$

d) $z = \sin(x^3 + y^2)$

Bài 15. Tính vi phân cấp hai của hàm số sau:

a) $z = xy^3 - x^2y$

b) $z = e^{2x}(x + y^2)$

c) $z = \ln(x^3 + y^2)$

Bài 16. Tìm cực trị của các hàm số sau:

a) $z = 4x^3 + 6x^2 - 4xy - y^2 - 8x + 2$

d) $z = \frac{4}{x} + \frac{3}{y} - \frac{xy}{12}$

b) $z = 2x^2 + 3y^2 - e^{-(x^2+y^2)}$

e) $z = e^{2x}(4x^2 - 2xy + y^2)$

c) $z = 4xy - x^4 - 2y^2$

f) $z = x^3 + y^3 - (x + y)^2$

Bài 17. Tìm cực trị của hàm số $z = x^2 + y^2$ với điều kiện $3x - 4y = 5$.

Bài 18. Tìm một điểm thuộc elip $4x^2 + y^2 = 4$ sao cho nó xa điểm $A(1; 0)$ nhất.

Bài 19. Tính giá trị lớn nhất và bé nhất của các hàm số

a) $z = x^2 + y^2 + xy - 7x - 8y$ trong hình tam giác giới hạn bởi các đường thẳng $x = 0$, $y = 0$, và $x + y = 6$

b) $z = 4x^2 - 9y^2$ trong miền giới hạn bởi đường elip $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

Chương 2

Ứng dụng của phép tính vi phân trong hình học

Ứng dụng trong hình học phẳng

Bài 20. Viết phương trình tiếp tuyến và pháp tuyến với đường cong

- a) $y = x^3 + 2x^2 - 4x - 3$ tại điểm $(-2; 5)$
- b) $y = e^{1-x^2}$ tại giao điểm của đường cong với đường thẳng $y = 1$
- c) $x = \cos t + t \sin t, y = \sin t - t \cos t$ tại điểm ứng với $t = \pi/2$

Bài 21. Tính độ cong của

- a) $y = \ln(\cos x)$ tại điểm ứng với $x = \pi/4$
- b) $\begin{cases} x = t^3 + 2 \\ y = \ln(2t - 1) \end{cases}$ tại điểm $M(3; 0)$

Bài 22. Tìm điểm M trên parabol $P: y = x^2 - 4x + 6$ sao cho độ cong của P tại M đạt lớn nhất.

Ứng dụng trong hình học không gian

Bài 23. Giả sử $\vec{p}(t), \vec{q}(t), \alpha(t)$ là các hàm khả vi. Chứng minh rằng

- a) $\frac{d}{dt}(\vec{p}(t)\vec{q}(t)) = \vec{p}(t)\frac{d\vec{q}(t)}{dt} + \frac{d\vec{p}(t)}{dt}\vec{q}(t)$
- b) $\frac{d}{dt}(\alpha(t)\vec{p}(t)) = \alpha(t)\frac{d\vec{p}(t)}{dt} + \alpha'(t)\vec{p}(t)$

Bài 24. Đường cong C được biểu diễn bởi hàm vectơ $\vec{r}(t)$. Giả sử $\vec{r}(t)$ là hàm khả vi và $\vec{r}'(t)$ luôn vuông góc với $\vec{r}(t)$. Chứng minh rằng C nằm trên một mặt cầu tâm tại gốc tọa độ.

Bài 25. Viết phương trình tiếp tuyến và pháp diện của đường

- a) $x = a \sin^2 t, y = b \sin t \cos t, z = c \cos^2 t$ tại điểm ứng với $t = \pi/4, (a, b, c > 0)$
- b) $x = 2 \cos t, y = 4 \sin t, z = 4 \cos^2 t + 1$ tại điểm $M(\sqrt{2}; 2\sqrt{2}; 3)$

Bài 26. Viết phương trình pháp tuyến và tiếp diện của mặt cong

- a) $x^2 + 3y + 2z^3 = 3$ tại điểm $(2; -1; 1)$
- b) $z = \ln(2 + 3x^2 - 4y^2)$ tại điểm $(1; 1; 0)$
- c) $2x^2 - y^2 + 2z^2 = 3$ tại điểm $(1; -1; 1)$
- d) $x^2 + 2y^3 - yz = 0$ tại điểm $(1; 1; 3)$
- e) $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 25$ tại điểm $(4; 1; -4)$

Bài 27. Viết phương trình tiếp tuyến và pháp diện của đường

- a) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 25 \\ 3x + 4y + 5z = 0 \end{cases}$ tại điểm $A(4; -3; 0)$
- b) $\begin{cases} 2x^2 + 3y^2 + z^2 = 47 \\ x^2 + 2y^2 = z \end{cases}$ tại điểm $B(-2; 1; 6)$

Chương 3

Tích phân kép

Tích phân kép

Bài 28. Thay đổi thứ tự lấy tích phân của các tích phân sau

$$\text{a) } \int_0^1 dx \int_{x^3}^{\sqrt{x}} f(x, y) dy$$

$$\text{c) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_{\sin x}^{1+x^2} f(x, y) dy$$

$$\text{b) } \int_0^1 dy \int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx$$

$$\text{d) } \int_0^{\sqrt{2}} dy \int_0^y f(x, y) dx + \int_{\sqrt{2}}^2 dy \int_0^{\sqrt{4-y^2}} f(x, y) dx$$

Bài 29. Tính các tích phân sau

$$\text{a) } \iint_{\mathcal{D}} \frac{x}{x^2 + y^2} dx dy, \text{ trong đó } \mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1\}$$

$$\text{b) } \iint_{\mathcal{D}} (2y - x) dx dy, \text{ trong đó } \mathcal{D} \text{ là miền giới hạn bởi các đường cong } y = x^2 \text{ và } y = 1$$

$$\text{c) } \iint_{\mathcal{D}} |x - y| dx dy, \text{ trong đó } \mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$$

$$\text{d) } \iint_{\mathcal{D}} x \sqrt{y^2 - x^2} dx dy, \text{ trong đó } \mathcal{D} \text{ là miền giới hạn bởi các đường } y = x, x = 0 \text{ và } y = 1$$

$$\text{e) } \iint_{\mathcal{D}} 2xy dx dy, \text{ trong đó } \mathcal{D} \text{ giới hạn bởi các đường } x = y^2, x = -1, y = 0 \text{ và } y = 1$$

$$\text{f) } \iint_{|x|+|y|\leq 1} (|x| + |y|) dx dy$$

$$\text{g) } \int_0^1 dx \int_{\sqrt[4]{x}}^1 \frac{dy}{y^5 + 1}$$

Bài 30. Tìm cận lấy tích phân trong tọa độ cực của $\iint_D f(x, y) dx dy$, trong đó D là miền xác định như sau

- a) $a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2$
- b) $x^2 + y^2 \geq x, x^2 + y^2 \leq 2x, x \leq y, y \leq \sqrt{3}x$
- c) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1, y \geq 0, (a, b > 0)$

Bài 31. Dùng phép đổi biến trong tọa độ cực, hãy tính các tích phân sau

- a) $\int_0^R dx \int_{-\sqrt{Rx-x^2}}^{\sqrt{Rx-x^2}} \sqrt{Rx-x^2-y^2} dy, (R > 0)$
- b) $\iint_{\mathcal{D}} x \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$, với $\mathcal{D} : x^2 + y^2 \leq x$
- c) $\iint_{\mathcal{D}} (x^2 + y^2) dx dy$, với $\mathcal{D} : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq y \leq x\}$
- d) $\iint_{\mathcal{D}} xy dx dy$, với
 - 1) \mathcal{D} là mặt tròn: $(x-2)^2 + y^2 \leq 1$
 - 2) \mathcal{D} là nửa mặt tròn: $(x-2)^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0$
- e) $\iint_{\mathcal{D}} |x-y| dx dy$, với $\mathcal{D} : x^2 + y^2 \leq 1$

Bài 32. Chuyển tích phân sau theo hai biến u và v

- a) $\int_0^1 dx \int_{-x}^x f(x, y) dy$, nếu đặt $\begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \end{cases}$
- b) Áp dụng tính với $f(x, y) = (2 - x - y)^2$.

Bài 33. Tính các tích phân sau

- a) $\iint_{\mathcal{D}} \frac{dx dy}{(x^2 + y^2)^2}$, trong đó $\mathcal{D} : \begin{cases} y \leq x^2 + y^2 \leq 2y \\ x \leq y \leq \sqrt{3}x \end{cases}$
- b) $\iint_{\mathcal{D}} \frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}} dx dy$, trong đó $\mathcal{D} : x^2 + y^2 \leq 1$
- c) $\iint_{\mathcal{D}} \frac{xy}{x^2 + y^2} dx dy$, trong đó $\mathcal{D} : \begin{cases} 2x \leq x^2 + y^2 \leq 12 \\ x^2 + y^2 \geq 2\sqrt{3}y \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$

d) $\iint_{\mathcal{D}} |9x^2 - 4y^2| dx dy$, trong đó $\mathcal{D} : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1$

e) $\iint_{\mathcal{D}} (4xy + 3y) dx dy$, trong đó $1 \leq xy \leq 4, x \leq y \leq 9x$

3.1 Ứng dụng của tích phân bội

Bài 34. Tính diện tích của miền \mathcal{D} giới hạn bởi các đường $\begin{cases} y^2 = x, y^2 = 2x \\ x^2 = y, x^2 = 2y. \end{cases}$

Bài 35. Tính diện tích của miền \mathcal{D} giới hạn bởi $\begin{cases} y = 0, y^2 = 4ax \\ x + y = 3a, y \leq 0, (a > 0). \end{cases}$

Bài 36. Tính diện tích của miền \mathcal{D} xác định bởi $\begin{cases} 2x \leq x^2 + y^2 \leq 4x \\ 0 \leq y \leq x. \end{cases}$

Bài 37. Tính diện tích của miền \mathcal{D} xác định bởi $r \geq 1; r \leq \frac{2}{\sqrt{3}} \cos \varphi$.

Bài 38. Tính diện tích của miền \mathcal{D} giới hạn bởi đường $r = a(1 + \cos \varphi)$, $(a > 0)$.

Bài 39. Chứng minh rằng diện tích miền \mathcal{D} xác định bởi $x^2 + (\alpha x - y)^2 \leq 4$ không đổi $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Bài 40. Tính thể tích của miền xác định bởi

$$x + y \geq 1, x + 2y \leq 2, y \geq 0, 0 \leq z \leq 2 - x - y.$$

Bài 41. Tính thể tích của miền giới hạn bởi các mặt

$$z = 4 - x^2 - y^2, 2z = 2 + x^2 + y^2.$$

Chương 4

Tích phân đường

Tích phân đường loại 1

Tính các tích phân sau:

Bài 42. $\int_C (xy + x + 2y)ds$, trong đó C là đường cong $x = \cos t, y = \sin t$ với $0 \leq t \leq \pi/2$

Bài 43. $\int_C xyds$, trong đó C là nửa đường elip $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1, y \geq 0$

Bài 44. $\int_C (x - y)ds$, C là đường tròn $x^2 + y^2 = 2x$

Bài 45. $\int_C y^2ds$, C là đường có phương trình $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t), (0 \leq t \leq 2\pi, a > 0) \end{cases}$

Tích phân đường loại 2

Tính các tích phân sau:

Bài 46. $\int_L (x^2 + y^2)dx + (3xy + 1)dy$, trong đó L là cung parabol $y = x^2$ từ $O(0; 0)$ đến $M(1; 1)$

Bài 47. $\int_C (2x - y)dx + xdy$, trong đó C là đường cong $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ theo chiều tăng của t , $(0 \leq t \leq 2\pi, a > 0)$

Bài 48. $\int_{ABCA} 2(x^2 + y^2)dx + x(4y + 3)dy$ trong đó $ABCA$ là đường gấp khúc đi qua $A(0; 0)$, $B(1; 1)$, $C(0; 2)$

Bài 49. $\int_{ABCD} \frac{dx + dy}{|x| + |y|}$, trong đó $ABCD$ là đường gấp khúc đi qua $A(1; 0)$, $B(0; 1)$, $C(-1; 0)$ và $D(0; -1)$

Bài 50. Tính tích phân sau

$$\int_C (xy + x + y)dx + (xy + x - y)dy$$

bằng hai cách: tính trực tiếp, tính nhờ công thức Green rồi so sánh các kết quả, với C là đường

a) $x^2 + y^2 = R^2$

b) $x^2 + y^2 = 2x$

c) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, (a, b > 0)$

Bài 51. $\oint_{x^2+y^2=2x} x^2 \left(y + \frac{x}{4}\right) dy - y^2 \left(x + \frac{y}{4}\right) dx$

Bài 52. $\oint_{OABO} e^x [(1 - \cos y)dx - (y - \sin y)dy]$, trong đó $OABO$ là đường gấp khúc qua $O(0; 0)$, $A(1; 1)$ và $B(0; 2)$

Bài 53. $\oint_{x^2+y^2=2x} (xy + e^x \sin x + x + y)dx - (xy - e^{-y} + x - \sin y)dy$

Bài 54. $\oint_C (xy^4 + x^2 + y \cos(xy)) dx + \left(\frac{x^3}{3} + xy^2 - x + x \cos(xy)\right) dy$, trong đó C là đường cong $x = a \cos t, y = a \sin t, (a > 0)$

Bài 55. Dùng tích phân đường loại hai tính diện tích của miền giới hạn bởi một nhịp cycloid: $x = a(t - \sin t); y = a(1 - \cos t)$ và trục $Ox, (a > 0)$.

Bài 56. $\int_{(-2;-1)}^{(3;0)} (x^4 + 4xy^3)dx + (6x^2y^2 - 5y^4)dy$

Bài 57. $\int_{(1;\pi)}^{(2;2\pi)} \left(1 - \frac{y^2}{x^2} \cos \frac{y}{x}\right) dx + \left(\sin \frac{y}{x} + \frac{y}{x} \cos \frac{y}{x}\right) dy$

Bài 58. Tính tích phân đường $\int_C (y^2 - e^y \sin x)dx + (x^2 + 2xy + e^y \cos x)dy$, với C là nửa đường tròn $x = \sqrt{2y - y^2}$, đi từ $O(0; 0)$ đến $P(0; 2)$.

Bài 59. Tìm hằng số a, b để biểu thức $(y^2 + axy + y \sin(xy))dx + (x^2 + bxy + x \sin(xy))dy$ là vi phân toàn phần của một hàm số $u(x, y)$ nào đó. Hãy tìm hàm số $u(x, y)$ đó.

Bài 60. Tìm hàm số $h(y)$ để tích phân

$$\int_{AB} h(y)[y(2x + y^3)dx - x(2x - y^3)dy]$$

không phụ thuộc vào đường đi trong miền xác định. Với $h(y)$ vừa tìm được, hãy tính tích phân trên từ $A(0; 1)$ đến $B(-3; 2)$.

Chương 5

Lý thuyết trường

Bài 61. Tính đạo hàm theo hướng $\vec{\ell}$ của hàm $u = 3x^3 + y^2 + 2z^3 - 2xyz$ tại điểm $A(1; 2; 1)$ với $\vec{\ell} = \overrightarrow{AB}$, $B(2; 4; 2)$.

Bài 62. Cho hàm số $u(x, y, z) = x^3 + 3x^2y + 2yz^3$. Tính đạo hàm $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}$ tại điểm $A(1; 1; -1)$, trong đó \vec{n} là vectơ pháp tuyến hướng ra ngoài của mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ tại điểm A .

Bài 63. Tính môđun của $\overrightarrow{\text{grad}}u$, với

$$u = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$$

tại $A(2; 1; 1)$. Khi nào thì $\overrightarrow{\text{grad}}u$ vuông góc với Oz , khi nào thì $\overrightarrow{\text{grad}}u = \vec{0}$?

Bài 64. Tính $\overrightarrow{\text{grad}}u$, với

$$u = r^2 + \frac{1}{r} + \ln r, \text{ với } r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Bài 65. Theo hướng nào thì sự biến thiên của hàm số $u = x \sin z - y \cos z$ từ gốc $O(0; 0; 0)$ là lớn nhất?

Bài 66. Tính góc giữa hai vector $\overrightarrow{\text{grad}}z$ của các hàm số $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ và $z = x - 3y + \sqrt{3xy}$ tại $(3; 4)$.

Bài 67. Trong các trường vectơ sau đây, trường nào là trường thế? Tìm hàm thế vị (nếu có)

a) $\vec{F} = (x^2 - 4xy)\vec{i} + (2x^3 - 2z)\vec{j} + e^z\vec{k}$

b) $\vec{F} = (yz + 1)\vec{i} + (xz + 2y)\vec{j} + (xy - 3)\vec{k}$

c) $\vec{F} = (x + y)\vec{i} + (x + z)\vec{j} + (z + y)\vec{k}$

d) $\vec{F} = C \frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}}, C \neq 0$ hằng số

e) $\vec{F} = (3x^2 + 2yz)\vec{i} + (y^2 + 2xz + e^y)\vec{j} + (9z^2 + 2xy)\vec{k}$