

BÀI TẬP THAM KHẢO GIẢI TÍCH I**Nhóm ngành 3****Mã số : MI 1113****Chương 1****Phép tính vi phân hàm một biến số****1.1-1.4. Dãy số, hàm số****Bài 1.** Tìm tập xác định của các hàm số

a) $y = \sqrt{2 \operatorname{arccot} x - \pi}$

c) $y = \frac{\sqrt{x}}{\sin \pi x}$

b) $y = \arcsin \frac{2x}{1+x}$

d) $y = \arccos(\sin x)$

Bài 2. Tìm miền giá trị của hàm số

a) $y = \log(1 - 2 \cos x)$

c) $y = \operatorname{arccot}(\sin x)$

b) $y = \arcsin\left(\log \frac{x}{10}\right)$

d) $y = \arctan(e^x)$

Bài 3. Biểu tính thuế thu nhập cá nhân được xác định như sau. Dưới 9 triệu, không phải chịu thuế. Từ 9 triệu đến dưới 14 triệu, chịu thuế 5%, từ 14 triệu đến dưới 19 triệu, 10%, từ 19 triệu đến dưới 27 triệu, 15%, từ 27 triệu đến dưới 41 triệu, 20%, từ 41 triệu đến dưới 61 triệu, 25%. Từ 61 triệu đến dưới 89 triệu, 30%. Từ 89 triệu, 35%. Tìm hàm biểu diễn tiền thuế phải nộp theo mức thu nhập.

Bài 4. Tìm $f(x)$ biết

a) $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2}$

b) $f\left(\frac{x}{1+x}\right) = x^2$

Bài 5. Tìm hàm ngược của hàm số

a) $y = 2 \arcsin x$

b) $y = \frac{1-x}{1+x}$

c) $y = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$

Bài 6. Tìm giới hạn của những dãy số (nếu hội tụ) với số hạng tổng quát x_n như sau

a) $x_n = n - \sqrt{n^2 - n}$

c) $x_n = \frac{\sin^2 n - \cos^3 n}{n}$

b) $x_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{(n-1)n}$

d) $x_n = \frac{\sqrt{n} \cos n}{n+1}$

Bài 7. Xét sự hội tụ và tìm giới hạn (nếu có) của các dãy với số hạng tổng quát x_n như sau

a) $x_n = \sqrt[n]{n^2 + 2}$

b) $x_n = \frac{1}{2} \left(x_{n-1} + \frac{1}{x_{n-1}} \right), x_0 > 0$

1.5-1.6. Giới hạn hàm số

Bài 8. Tìm các giới hạn

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} \sqrt{1+x} - \frac{1}{x} \right)$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+\alpha x} - \sqrt[n]{1+\beta x}}{x}, (m, n \in \mathbb{N}^*)$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3 + x^2 - 1} - x)$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x (\sqrt{x^2 + 2x} - 2\sqrt{x^2 + x} + x)$

c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{100} - 2x + 1}{x^{50} - 2x + 1}$

f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+4x} - 1}{\ln(1+3\sin x)}$

Bài 9. Tìm các giới hạn

a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x + \arccos^3 x) - \ln x}{x^2}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x})$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cos 2x \cos 3x}{1 - \cos x}$

Bài 10. Tìm các giới hạn

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right)^{\frac{x-1}{x+1}}$

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} \right)^x$

b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\cos \sqrt{x})^{\frac{1}{x}}$

e) $\lim_{x \rightarrow 1} (1 + \sin \pi x)^{\cot \pi x}$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 (\sqrt[n]{x} - \sqrt[n+1]{x}), x > 0.$

f) $\lim_{x \rightarrow 0} [\ln(e+2x)]^{\frac{1}{\sin x}}$

Bài 11. So sánh các cặp VCB sau

a) $\alpha(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}}$ và $\beta(x) = e^{\sin x} - \cos x$, khi $x \rightarrow 0^+$

b) $\alpha(x) = \sqrt[3]{x} - \sqrt{x}$ và $\beta(x) = \cos x - 1$, khi $x \rightarrow 0^+$

c) $\alpha(x) = x^3 + \sin^2 x$ và $\beta(x) = \ln(1 + 2 \arctan(x^2))$, khi $x \rightarrow 0$

1.7. Hàm số liên tục

Bài 12. Tìm a để hàm số liên tục tại $x = 0$

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{x^2}, & \text{nếu } x \neq 0, \\ a, & \text{nếu } x = 0. \end{cases}$

b) $g(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 1, & \text{nếu } x \geq 0, \\ a \cos x + b \sin x, & \text{nếu } x < 0. \end{cases}$

Bài 13. Điểm $x = 0$ là điểm gián đoạn loại gì của hàm số

a) $y = \frac{8}{1 - 2^{\cot x}}$

c) $y = \frac{\sin \frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x}} + 1}$

b) $y = \frac{1}{x} \arcsin x$

d) $y = \frac{e^{ax} - e^{bx}}{x}, (a \neq b)$

Bài 14. Các hàm số sau đây có liên tục đều trên miền đã cho không?

a) $y = \frac{x}{4 - x^2}; -1 \leq x \leq 1$

b) $y = \ln x; 0 < x < 1$

1.8. Đạo hàm và vi phân

Bài 15. Tìm đạo hàm của hàm số

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x, & \text{nếu } x < 1, \\ (1 - x)(2 - x), & \text{nếu } 1 \leq x \leq 2, \\ x - 2, & \text{nếu } x > 2. \end{cases}$$

Bài 16. Tìm $f'(x)$ biết $\frac{d}{dx}[f(2017x)] = x^2$.

$$f(x) = \begin{cases} x^n \sin \frac{1}{x}, & \text{nếu } x \neq 0, \\ 0, & \text{nếu } x = 0 \end{cases} \quad (n \in \mathbb{Z})$$

- 4

Bài 24. Tính đạo hàm cấp n của hàm số

a) $y = \frac{x}{x^2 - 1}$

c) $y = \frac{x}{\sqrt[3]{1+x}}$

e) $y = \sin^4 x + \cos^4 x$

b) $y = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$

d) $y = e^{ax} \sin(bx + c)$

f) $y = x^{n-1} e^{\frac{1}{x}}$

Bài 25. Tìm vi phân cấp cao của hàm số

a) $y = (2x + 1) \sin x$. Tính $d^{10}y(0)$

c) $y = x^9 \ln x$. Tính $d^{10}y(1)$

b) $y = e^x \cos x$. Tính $d^{20}y(0)$

d) $y = x^2 e^{ax}$. Tính $d^{20}y(0)$

Bài 26. Trong một hồ nuôi cá, cá trong hồ liên tục được sinh ra và khai thác. Số lượng cá trong hồ P được mô tả bởi phương trình:

$$P'(t) = r_0 \left(1 - \frac{P(t)}{P_c} \right) P(t) - \beta P(t)$$

với r_0 là tỉ lệ sinh sản, P_c là số lượng cá lớn nhất hồ có thể duy trì, β là tỉ lệ khai thác. Cho $P_c = 10000$, tỉ lệ sinh sản và tỉ lệ khai thác tương ứng là 5% và 4%. Tìm số lượng cá ổn định.

1.9. Các định lý về hàm khả vi và ứng dụng

Bài 27. Chứng minh rằng $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$, phương trình

$$a \cos x + b \cos 2x + c \cos 3x = 0$$

có nghiệm trong khoảng $(0, \pi)$.

Bài 28. Chứng minh rằng phương trình $x^n + px + q = 0$ với n nguyên dương, $n \geq 2$, không thể có quá 2 nghiệm thực nếu n chẵn, không có quá 3 nghiệm thực nếu n lẻ.

Bài 29. Cho ba số thực a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 0$. Chứng minh rằng phương trình $8ax^7 + 3bx^2 + c = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc $(0, 1)$.

Bài 30. Giải thích tại sao công thức Cauchy dạng $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$ không áp dụng được đối với các hàm số $f(x) = x^2$, $g(x) = x^3$, $-1 \leq x \leq 1$

Bài 31. Chứng minh bất đẳng thức

a) $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$

c) $\frac{b-a}{1+b^2} < \arctan b - \arctan a < \frac{b-a}{1+a^2},$
 $0 < a < b$

b) $\frac{a-b}{a} < \ln \frac{a}{b} < \frac{a-b}{b}, 0 < b < a.$

Bài 32. Tồn tại hay không hàm f sao cho $f(0) = -1$, $f(2) = 4$ và $f'(x) \leq 2$ với mọi x ?

Bài 33. Tìm các giới hạn

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x} \right)$

f) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - a \tan^2 x)^{\frac{1}{x \sin x}}$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$

g) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\tan \frac{\pi}{2} x}{\ln(1-x)}$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - \cos \frac{1}{x}}{1 - \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}}$

h) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x)^{\tan x}$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}$

i) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + 2^x)^{\frac{1}{x}}$

e) $\lim_{x \rightarrow 1} \tan \frac{\pi x}{2} \ln(2-x)$

j) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 + 3^x)^{\tan \frac{1}{x}}$

Bài 34. Xác định a, b sao cho biểu thức sau đây có giới hạn hữu hạn khi $x \rightarrow 0$

$$f(x) = \frac{1}{\sin^3 x} - \frac{1}{x^3} - \frac{a}{x^2} - \frac{b}{x}.$$

Bài 35. Cho f là một hàm số thực khả vi trên $[a, b]$ và có đạo hàm $f''(x)$ trên (a, b) . Chứng minh rằng với mọi $x \in (a, b)$ có thể tìm được ít nhất một điểm $c \in (a, b)$ sao cho

$$f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-a) = \frac{(x-a)(x-b)}{2} f''(c).$$

Bài 36. Khảo sát tính đơn điệu của hàm số

a) $y = x^4 - 2x^3 + 2x - 1$

c) $y = x + |\sin 2x|, x \in [0, \pi]$

b) $y = 3 \arctan x - \ln(1+x^2)$

Bài 37. Chứng minh bất đẳng thức

a) $2x \arctan x \geq \ln(1+x^2)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$

b) $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$ với mọi $x \geq 0$

Bài 38. Tìm cực trị của hàm số

a) $y = \frac{3x^2 + 4x + 4}{x^2 + x + 1}$

c) $y = \sqrt[3]{(1-x)(x-2)^2}$

b) $y = x - \ln(1+x)$

d) $y = x^{\frac{2}{3}} + (x-2)^{\frac{2}{3}}$

Bài 39. Một nhà bán lẻ bán 1200 TV một tuần ở mức giá 35 triệu. Một nghiên cứu thị trường chỉ ra, cứ giảm giá 1 triệu thì lượng bán sẽ tăng lên 80 chiếc một tuần. Giá thành sản xuất x chiếc TV trong một tuần là: $C(x) = 350 + 12x$ (triệu).

- Tìm hàm đơn giá và hàm doanh thu (theo lượng bán).
- Cửa hàng nên bán ở mức giá bao nhiêu để cực đại doanh thu?
- Tìm giá bán để cực đại lợi nhuận.

Bài 40. Cho $f(x)$ là hàm lồi trên đoạn $[a, b]$, chứng minh rằng $\forall c \in (a, b)$ ta có

$$\frac{f(c) - f(a)}{c - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(b) - f(c)}{b - c}.$$

Bài 41. Chứng minh các bất đẳng thức sau

- $\tan \frac{x+y}{2} \leq \frac{\tan x + \tan y}{2}, \forall x, y \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$
- $x \ln x + y \ln y \geq (x+y) \ln \frac{x+y}{2}, \forall x, y > 0$

1.10. Khảo sát hàm số, đường cong

Bài 42. Tìm tiệm cận của các đường cong sau

- $y = \sqrt[3]{1+x^3}$
- $y = \ln(1+e^{-x})$
- $y = \frac{x^3 \operatorname{arccot} x}{1+x^2}$

Bài 43. Khảo sát hàm số

- $y = e^{\frac{1}{x}-x}$
- $y = \sqrt[3]{x^3 - x^2 - x + 1}$
- $y = \frac{x^3}{x^2 + 1}$
- $y = \frac{x-2}{\sqrt{x^2+1}}$

Chương 2

Phép tính tích phân hàm một biến số

2.1 Tích phân bất định

Bài 44. Tính các tích phân

a) $\int e^{\sin^2 x} \sin 2x dx$

e) $\int \frac{(x^2 + 2)dx}{x^3 + 1}$

i) $\int \frac{dx}{3 \sin x - 4 \cos x}$

b) $\int (x + 2) \ln x dx$

f) $\int \frac{dx}{(x + a)^2 (x + b)^2}$

j) $\int \frac{(3 - 2x)dx}{\sqrt{1 - x^2}}$

c) $\int |x^2 - 3x + 2| dx$

g) $\int \sin 5x \cos 3x dx$

k) $\int \frac{dx}{1 + \sqrt{1 + x^2}}$

d) $\int \frac{x dx}{(x + 2)(x + 5)}$

h) $\int \tan^3 x dx$

l) $\int \frac{(x + 1)dx}{\sqrt{x^2 - 2x - 1}}$

Bài 45. Tính các tích phân

a) $\int \frac{x^4 dx}{x^{10} - 1}$

d) $\int \sin^{n-1} x \sin(n + 1)x dx, n \in \mathbb{N}^*$

b) $\int x \sqrt{-x^2 + 3x - 2} dx$

e) $\int e^{-2x} \cos 3x dx$

c) $\int \frac{dx}{(x^2 + 2x + 5)^2}$

f) $\int \arcsin^2 x dx$

Bài 46. Lập công thức truy hồi tính $I_n, n \in \mathbb{N}$

a) $I_n = \int x^n e^x dx$

b) $I_n = \int \sin^n x dx$

c) $I_n = \int \frac{dx}{\cos^n x}$

2.2 Tích phân xác định

Bài 47. Tính các đạo hàm

$$\text{a) } \frac{d}{dx} \int_x^y e^{t^2} dt \quad \text{b) } \frac{d}{dy} \int_x^y e^{t^2} dt \quad \text{c) } \frac{d}{dx} \int_{x^2}^{x^3} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$$

Bài 48. Dùng định nghĩa và cách tính tích phân xác định, tìm các giới hạn

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n\alpha} + \frac{1}{n\alpha + \beta} + \frac{1}{n\alpha + 2\beta} + \cdots + \frac{1}{n\alpha + (n-1)\beta} \right], (\alpha, \beta > 0)$$

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{1 + \frac{2}{n}} + \cdots + \sqrt{1 + \frac{n}{n}} \right)$$

Bài 49. Tính các giới hạn

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{\sin x} \sqrt{\tan t} dt}{\tan x \int_0^{\sqrt{\sin x}} \sqrt{\sin t} dt} \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x (\arctan t)^2 dt}{\sqrt{x^2 + 1}} \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\int_0^x e^{t^2} dt \right)^2}{\int_0^x e^{2t^2} dt}$$

Bài 50. Tính các tích phân sau

$$\text{a) } \int_{1/e}^e |\ln x| (x+1) dx \quad \text{d) } \int_0^1 \frac{\sin^2 x \cos x}{(1 + \tan^2 x)^2} dx$$

$$\text{b) } \int_1^e (x \ln x)^2 dx \quad \text{e) } \int_0^3 \arcsin \sqrt{\frac{x}{1+x}} dx$$

$$\text{c) } \int_0^{3\pi/2} \frac{dx}{2 + \cos x} \quad \text{f) } \int_0^{\pi/2} \cos^n x \cos nx dx, n \in \mathbb{N}^*$$

Bài 51. Chứng minh rằng nếu $f(x)$ liên tục trên $[0, 1]$ thì

$$\text{a) } \int_0^{\pi/2} f(\sin x) dx = \int_0^{\pi/2} f(\cos x) dx \quad \text{b) } \int_0^{\pi} x f(\sin x) dx = \int_0^{\pi} \frac{\pi}{2} f(\sin x) dx$$

Áp dụng tính các tích phân sau

$$1. \int_0^{\pi} \frac{x \sin x dx}{1 + \cos^2 x} \quad 2. \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin x} dx}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}}$$

Bài 52. Cho $f(x), g(x)$ là hai hàm số khả tích trên $[a, b]$. Chứng minh bất đẳng thức (với $a < b$)

$$\left(\int_a^b f(x)g(x) dx \right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2(x) dx \right) \left(\int_a^b g^2(x) dx \right)$$

(Bất đẳng thức Cauchy-Schwartz)

Bài 53. Xét sự hội tụ và tính (trong trường hợp hội tụ) các tích phân suy rộng sau

a) $\int_{-\infty}^0 xe^x dx$

d) $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x}$

b) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^2}$

e) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 3x + 2}$

c) $\int_0^{+\infty} e^{-x} \sin 2x dx$

f) $\int_0^{+\infty} \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx$

Chương 3

Hàm số nhiều biến số

3.1 Các khái niệm cơ bản

Bài 54. Tìm miền xác định của các hàm số sau

$$\text{a) } z = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}} \qquad \text{c) } z = \arcsin \frac{y-1}{x}$$

$$\text{b) } z = \sqrt{(x^2 + y^2 - 1)(4 - x^2 - y^2)} \qquad \text{d) } z = \sqrt{x \sin y}$$

Bài 55. Tìm các giới hạn (nếu có) của các hàm số sau

$$\text{a) } f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}, \quad (x \rightarrow 0, y \rightarrow 0)$$

$$\text{b) } f(x, y) = \frac{y^2}{x^2 + 3xy}, \quad (x \rightarrow \infty, y \rightarrow \infty)$$

$$\text{c) } f(x, y) = \frac{(x-1)^3 - (y-2)^3}{(x-1)^2 + (y-2)^2}, \quad (x \rightarrow 1, y \rightarrow 2)$$

$$\text{d) } f(x, y) = \frac{1 - \cos \sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2}, \quad (x \rightarrow 0, y \rightarrow 0)$$

$$\text{e) } f(x, y) = \frac{x(e^y - 1) - y(e^x - 1)}{x^2 + y^2}, \quad (x \rightarrow 0, y \rightarrow 0)$$

$$\text{f) } f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^4}, \quad (x \rightarrow 0, y \rightarrow 0)$$

Bài 56. Tính các giới hạn

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2 + y^2},$$

$$\text{b) } \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2 + y^2}$$

$$\text{c) } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{x^2 + y^2}$$

3.2 Đạo hàm riêng và vi phân

Bài 57. Tính các đạo hàm riêng của các hàm số sau

$$\begin{array}{lll} \text{a) } z = \ln \left(x + \sqrt{x^2 + y^2} \right) & \text{c) } z = \arctan \sqrt{\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}} & \text{e) } u = x^{y^z}, (x, y, z > 0) \\ \text{b) } z = y^2 \sin \frac{x}{y} & \text{d) } z = x^{y^3}, (x > 0) & \text{f) } u = e^{\frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}}. \end{array}$$

Bài 58. Khảo sát sự liên tục của hàm số và sự tồn tại các đạo hàm riêng của nó

$$\begin{array}{l} \text{a) } f(x, y) = \begin{cases} x \arctan \left(\frac{y}{x} \right)^2, & \text{nếu } x \neq 0, \\ 0, & \text{nếu } x = 0. \end{cases} \\ \text{b) } f(x, y) = \begin{cases} \frac{x \sin y - y \sin x}{x^2 + y^2}, & \text{nếu } (x, y) \neq (0; 0), \\ 0, & \text{nếu } (x, y) = (0; 0). \end{cases} \end{array}$$

Bài 59. Giả sử $z = yf(x^2 - y^2)$, ở đây f là hàm số khả vi. Chứng minh rằng đối với hàm số z hệ thức sau luôn thỏa mãn

$$\frac{1}{x} z'_x + \frac{1}{y} z'_y = \frac{z}{y^2}.$$

Bài 60. Tìm đạo hàm riêng các hàm số hợp sau đây

$$\begin{array}{l} \text{a) } z = e^{u^2 - 2v^2}, u = \cos x, v = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \text{b) } z = \ln(u^2 + v^2), u = xy, v = \frac{x}{y} \\ \text{c) } z = \arcsin(x - y), x = 3t, y = 4t^3 \end{array}$$

Bài 61. Cho f là hàm số khả vi đến cấp hai trên \mathbb{R} . Chứng minh rằng hàm số $\omega(x, t) = f(x - 3t)$ thỏa mãn phương trình truyền sóng $\frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} = 9 \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}$.

Bài 62. Tìm vi phân toàn phần của các hàm số

$$\begin{array}{ll} \text{a) } z = \sin(x^2 + y^2) & \text{c) } z = \arctan \frac{x + y}{x - y} \\ \text{b) } z = \ln \tan \frac{y}{x} & \text{d) } u = x^{y^2 z} \end{array}$$

Bài 63. Ứng dụng vi phân, tính gần đúng

$$\begin{array}{ll} \text{a) } A = \sqrt[3]{(1, 02)^2 + (0, 05)^2} & \text{c) } C = \sqrt{(2, 02)^3 + e^{0,03}} \\ \text{b) } B = \ln \left(\sqrt[3]{1,03} + \sqrt[4]{0,98} - 1 \right) & \text{d) } D = (1, 02)^{1,01} \end{array}$$

Bài 64. Tính các đạo hàm riêng cấp hai của hàm số sau

a) $z = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2 + y^2)^3}$

c) $z = \arctan \frac{y}{x}$

b) $z = x^2 \ln(x + y)$

d) $z = \sin(x^3 + y^2)$

Bài 65. Tính vi phân cấp hai của hàm số sau:

a) $z = xy^3 - x^2y$

b) $z = e^{2x}(x + y^2)$

c) $z = \ln(x^3 + y^2)$

Bài 66. a) Khai triển hàm số $f(x, y) = x^2 + 3y^2 - 2xy + 6x + 2y - 4$ thành chuỗi Taylor ở lân cận điểm $(-2, 1)$.

b) Khai triển Maclaurin hàm số $f(x, y) = e^x \sin y$ đến bậc 3.

3.3 Cực trị của hàm số nhiều biến số

Bài 67. Tìm cực trị của các hàm số sau

a) $z = 4x^3 + 6x^2 - 4xy - y^2 - 8x + 2$

d) $z = \frac{4}{x} + \frac{3}{y} - \frac{xy}{12}$

b) $z = 2x^2 + 3y^2 - e^{-(x^2+y^2)}$

e) $z = e^{2x}(4x^2 - 2xy + y^2)$

c) $z = 4xy - x^4 - 2y^2$

f) $z = x^3 + y^3 - (x + y)^2$

Bài 68. Tìm cực trị có điều kiện

a) $z = xy$ với điều kiện $x + y = 1$

b) $z = x^2 + y^2$ với điều kiện $3x - 4y = 5$

c) $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ với điều kiện $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{a^2}$

Bài 69. Tìm một điểm thuộc elip $4x^2 + y^2 = 4$ sao cho nó xa điểm $A(1; 0)$ nhất.

Bài 70. Tính giá trị lớn nhất và bé nhất của các hàm số

a) $z = x^2 + y^2 + xy - 7x - 8y$ trong hình tam giác giới hạn bởi các đường thẳng $x = 0$, $y = 0$, và $x + y = 6$

b) $z = 4x^2 - 9y^2$ trong miền giới hạn bởi đường elip $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

Chương 4

Tích phân kép

Bài 71. Thay đổi thứ tự lấy tích phân của các tích phân sau

a) $\int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x, y) dy$

c) $\int_0^2 dx \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x}} f(x, y) dy$

b) $\int_0^1 dy \int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx$

d) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} dy \int_{\sin y}^{1+y^2} f(x, y) dx$

Bài 72. Tính các tích phân sau

a) $\iint_{\mathcal{D}} \frac{y}{1+xy} dx dy, \mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 2\}$

b) $\iint_{\mathcal{D}} x^2(y-x) dx dy$, với \mathcal{D} là miền giới hạn bởi các đường cong $y = x^2$ và $x = y^2$

c) $\iint_{\mathcal{D}} 2xy dx dy$, với \mathcal{D} giới hạn bởi các đường $x = y^2, x = -1, y = 0$ và $y = 1$

d) $\iint_{|x|+|y|\leq 1} (|x| + |y|) dx dy$

e) $\int_0^1 dx \int_0^{1-x^2} \frac{xe^{3y}}{1-y} dy$

f) $\iint_{\mathcal{D}} \frac{2xy+1}{\sqrt{1+x^2+y^2}} dx dy$, trong đó $\mathcal{D} : x^2 + y^2 \leq 1$

g) $\iint_{\mathcal{D}} \frac{dx dy}{(x^2 + y^2)^2}$, trong đó $\mathcal{D} : \begin{cases} y \leq x^2 + y^2 \leq 2y \\ x \leq y \leq \sqrt{3}x \end{cases}$

h) $\iint_{\mathcal{D}} \frac{xy}{x^2 + y^2} dx dy$, trong đó $\mathcal{D} : \begin{cases} 2x \leq x^2 + y^2 \leq 12 \\ x^2 + y^2 \geq 2\sqrt{3}y \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$