

**BÀI TẬP THAM KHẢO GIẢI TÍCH I****Nhóm ngành 2****Mã số: MI 1112****Chương 1****Phép tính vi phân hàm một biến số****1.1-1.4. Dãy số, hàm số****Bài 1.** Tìm tập xác định của các hàm số

a)  $y = \sqrt{2 \operatorname{arccot} x - \pi}$

c)  $y = \frac{\sqrt{x}}{\sin \pi x}$

b)  $y = \arcsin \frac{2x}{1+x}$

d)  $y = \arccos(\sin x)$

**Bài 2.** Chứng minh các đẳng thức sau

a)  $\sinh(-x) = -\sinh x$

d)  $\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x$

b)  $\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$

e)  $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

c)  $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$

f)  $\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$

**Bài 3.** Tìm miền giá trị của hàm số

a)  $y = \log(1 - 2 \cos x)$

c)  $y = \operatorname{arccot}(\sin x)$

b)  $y = \arcsin\left(\log \frac{x}{10}\right)$

d)  $y = \arctan(e^x)$

**Bài 4.** Tìm  $f(x)$  biết

a)  $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2}$

b)  $f\left(\frac{x}{1+x}\right) = x^2$

**Bài 5.** Tìm hàm ngược của hàm số

a)  $y = 2 \arcsin x$

b)  $y = \frac{1-x}{1+x}$

c)  $y = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$

## 1.5-1.6. Giới hạn hàm số

**Bài 6.** Tìm các giới hạn

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} \sqrt{1+x} - \frac{1}{x} \right)$

d)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+\alpha x} - \sqrt[n]{1+\beta x}}{x}, \quad (m, n \in \mathbb{N}^*)$

b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3 + x^2 - 1} - x)$

e)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x (\sqrt{x^2 + 2x} - 2\sqrt{x^2 + x} + x)$

c)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{100} - 2x + 1}{x^{50} - 2x + 1}$

f)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+4x} - 1}{\ln(1+3\sin x)}$

**Bài 7.** Tìm các giới hạn

a)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x + \arccos^3 x) - \ln x}{x^2}$

c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$

b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x})$

d)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cos 2x \cos 3x}{1 - \cos x}$

**Bài 8.** Tìm các giới hạn

a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right)^{\frac{x-1}{x+1}}$

d)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} \right)^x$

b)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\cos \sqrt{x})^{\frac{1}{x}}$

e)  $\lim_{x \rightarrow 1} (1 + \sin \pi x)^{\cot \pi x}$

c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 (\sqrt[n]{x} - \sqrt[n+1]{x}), x > 0.$

f)  $\lim_{x \rightarrow 0} [\ln(e + 2x)]^{\frac{1}{\sin x}}$

**Bài 9.** So sánh các cặp VCB sau

a)  $\alpha(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}}$  và  $\beta(x) = e^{\sin x} - \cos x$ , khi  $x \rightarrow 0^+$

b)  $\alpha(x) = \sqrt[3]{x} - \sqrt{x}$  và  $\beta(x) = \cos x - 1$ , khi  $x \rightarrow 0^+$

c)  $\alpha(x) = x^3 + \sin^2 x$  và  $\beta(x) = \ln(1 + 2 \arctan(x^2))$ , khi  $x \rightarrow 0$



**Bài 17.** Tìm

$$\text{a) } \frac{d}{d(x^2)} \left( \frac{\sin x}{x} \right) \qquad \text{b) } \frac{d(\sin x)}{d(\cos x)} \qquad \text{c) } \frac{d}{d(x^3)} (x^3 - 2x^6 - x^9).$$

**Bài 18.** Cho hàm số  $f(x)$ , biết rằng đường tiếp tuyến với đồ thị của  $f(x)$  tại điểm  $(4; 3)$  đi qua điểm  $(0; 2)$ . Tính  $f(4)$  và  $f'(4)$ .

**Bài 19.** Nếu  $C(x)$  là chi phí sản xuất của  $x$  đơn vị một mặt hàng nào đó. Khi đó chi phí biên là  $C'(x)$  cho biết chi phí phải bỏ ra khi muốn tăng sản lượng thêm một đơn vị. Cho hàm

$$C(x) = 2000 + 3x + 0,01x^2 + 0,0002x^3.$$

Tìm hàm chi phí biên, xác định chi phí biên tại  $x = 100$ , giá trị đó nói lên điều gì?

**Bài 20.** Tìm đạo hàm cấp cao của hàm số

$$\begin{array}{ll} \text{a) } y = \frac{x^2}{1-x}, \text{ tính } y^{(8)} & \text{d) } y = x^2 \sin x, \text{ tính } y^{(50)} \\ \text{b) } y = \frac{1+x}{\sqrt{1-x}}, \text{ tính } y^{(100)} & \text{e) } y = e^{x^2}, \text{ tính } y^{(10)}(0) \\ \text{c) } y = \ln(2x - x^2), \text{ tính } y^{(5)} & \text{f) } y = x \ln(1+2x), \text{ tính } y^{(10)}(0) \end{array}$$

**Bài 21.** Tìm đạo hàm cấp  $n$  của hàm số

$$\begin{array}{lll} \text{a) } y = \frac{x}{x^2 - 1} & \text{c) } y = \frac{x}{\sqrt[3]{1+x}} & \text{e) } y = \sin^4 x + \cos^4 x \\ \text{b) } y = \frac{1}{x^2 - 3x + 2} & \text{d) } y = e^{ax} \sin(bx + c) & \text{f) } y = x^{n-1} e^{\frac{1}{x}} \end{array}$$

**Bài 22.** Tìm vi phân cấp cao của hàm số

$$\begin{array}{ll} \text{a) } y = (2x + 1) \sin x. \text{ Tính } d^{10}y(0) & \text{c) } y = x^9 \ln x. \text{ Tính } d^{10}y(1) \\ \text{b) } y = e^x \cos x. \text{ Tính } d^{20}y(0) & \text{d) } y = x^2 e^{ax}. \text{ Tính } d^{20}y(0) \end{array}$$

**Bài 23.** Trong một hồ nuôi cá, cá trong hồ liên tục được sinh ra và khai thác. Số lượng cá trong hồ  $P$  được mô tả bởi phương trình:

$$P'(t) = r_0 \left( 1 - \frac{P(t)}{P_c} \right) P(t) - \beta P(t)$$

với  $r_0$  là tỉ lệ sinh sản,  $P_c$  là số lượng cá lớn nhất hồ có thể duy trì,  $\beta$  là tỉ lệ khai thác. Cho  $P_c = 10000$ , tỉ lệ sinh sản và tỉ lệ khai thác tương ứng là 5% và 4%. Tìm số lượng cá ổn định.

## 1.9. Các định lý về hàm khả vi và ứng dụng

**Bài 24.** Chứng minh rằng  $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ , phương trình

$$a \cos x + b \cos 2x + c \cos 3x = 0$$

có nghiệm trong khoảng  $(0, \pi)$ .

**Bài 25.** Chứng minh rằng phương trình  $x^n + px + q = 0$  với  $n$  nguyên dương,  $n \geq 2$ , không thể có quá 2 nghiệm thực nếu  $n$  chẵn, không có quá 3 nghiệm thực nếu  $n$  lẻ.

**Bài 26.** Cho ba số thực  $a, b, c$  thỏa mãn  $a + b + c = 0$ . Chứng minh rằng phương trình  $8ax^7 + 3bx^2 + c = 0$  có ít nhất một nghiệm thuộc  $(0, 1)$ .

**Bài 27.** Giải thích tại sao công thức Cauchy dạng  $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$  không áp dụng được đối với các hàm số  $f(x) = x^2$ ,  $g(x) = x^3$ ,  $-1 \leq x \leq 1$ .

**Bài 28.** Chứng minh bất đẳng thức

$$\begin{aligned} \text{a) } |\sin x - \sin y| &\leq |x - y| & \text{c) } \frac{b-a}{1+b^2} < \arctan b - \arctan a < \frac{b-a}{1+a^2}, \\ \text{b) } \frac{a-b}{a} < \ln \frac{a}{b} < \frac{a-b}{b}, 0 < b < a. & 0 < a < b \end{aligned}$$

**Bài 29.** Tồn tại hay không hàm  $f$  sao cho  $f(0) = -1$ ,  $f(2) = 4$  và  $f'(x) \leq 2$  với mọi  $x$ ?

**Bài 30.** Tìm các giới hạn

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x} \right) & \quad \text{e) } \lim_{x \rightarrow 1} \tan \frac{\pi x}{2} \ln(2-x) \\ \text{b) } \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right) & \quad \text{f) } \lim_{x \rightarrow 0} (1 - a \tan^2 x)^{\frac{1}{x \sin x}} \\ \text{c) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - \cos \frac{1}{x}}{1 - \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} & \quad \text{g) } \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\tan \frac{\pi}{2} x}{\ln(1-x)} \\ \text{d) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3} & \quad \text{h) } \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x)^{\tan x} \\ & \quad \text{i) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 + 3^x)^{\tan \frac{1}{x}} \end{aligned}$$

**Bài 31.** Xác định  $a, b$  sao cho biểu thức sau đây có giới hạn hữu hạn khi  $x \rightarrow 0$

$$f(x) = \frac{1}{\sin^3 x} - \frac{1}{x^3} - \frac{a}{x^2} - \frac{b}{x}.$$

**Bài 32.** Cho  $f$  là một hàm số thực khả vi trên  $[a, b]$  và có đạo hàm  $f''(x)$  trên  $(a, b)$ . Chứng minh rằng với mọi  $x \in (a, b)$  có thể tìm được ít nhất một điểm  $c \in (a, b)$  sao cho

$$f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-a) = \frac{(x-a)(x-b)}{2} f''(c).$$

**Bài 33.** Khảo sát tính đơn điệu của hàm số

a)  $y = x^4 - 2x^3 + 2x - 1$

c)  $y = x + |\sin 2x|, x \in [0, \pi]$

b)  $y = 3 \arctan x - \ln(1 + x^2)$

**Bài 34.** Chứng minh bất đẳng thức

a)  $2x \arctan x \geq \ln(1 + x^2)$  với mọi  $x \in \mathbb{R}$

b)  $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1 + x) \leq x$  với mọi  $x \geq 0$

**Bài 35.** Tìm cực trị của hàm số

a)  $y = \frac{3x^2 + 4x + 4}{x^2 + x + 1}$

c)  $y = \sqrt[3]{(1-x)(x-2)^2}$

b)  $y = x - \ln(1 + x)$

d)  $y = x^{\frac{2}{3}} + (x-2)^{\frac{2}{3}}$

**Bài 36.** Cho  $f(x)$  là hàm lồi trên đoạn  $[a, b]$ , chứng minh rằng  $\forall c \in (a, b)$  ta có

$$\frac{f(c) - f(a)}{c - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(b) - f(c)}{b - c}.$$

**Bài 37.** Chứng minh các bất đẳng thức sau

a)  $\tan \frac{x+y}{2} \leq \frac{\tan x + \tan y}{2}, \forall x, y \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

b)  $x \ln x + y \ln y \geq (x+y) \ln \frac{x+y}{2}, \forall x, y > 0$

## 1.10. Khảo sát hàm số, đường cong

**Bài 38.** Tìm tiệm cận của các đường cong sau

a)  $y = \sqrt[3]{1+x^3}$

d)  $\begin{cases} x = 2t - t^2 \\ y = \frac{2016t^2}{1-t^3} \end{cases}$

b)  $y = \ln(1 + e^{-x})$

e)  $\begin{cases} x = t \\ y = t + 2 \arctan t \end{cases}$

c)  $y = \frac{x^3 \operatorname{arccot} x}{1+x^2}$

**Bài 39.** Khảo sát các hàm số, đường cong sau

a)  $y = e^{\frac{1}{x}-x}$

c)  $y = \frac{x^3}{x^2+1}$

b)  $y = \sqrt[3]{x^3 - x^2 - x + 1}$

d)  $y = \frac{x-2}{\sqrt{x^2+1}}$

## Chương 2

# Phép tính tích phân hàm một biến số

### 2.1 Tích phân bất định

**Bài 40.** Tính các tích phân

a)  $\int e^{\sin^2 x} \sin 2x dx$

e)  $\int \frac{(x^2 + 2)dx}{x^3 + 1}$

i)  $\int \frac{dx}{3 \sin x - 4 \cos x}$

b)  $\int (x + 2) \ln x dx$

f)  $\int \frac{dx}{(x + a)^2 (x + b)^2}$

j)  $\int \frac{(3 - 2x)dx}{\sqrt{1 - x^2}}$

c)  $\int |x^2 - 3x + 2| dx$

g)  $\int \sin 5x \cos 3x dx$

k)  $\int \frac{dx}{1 + \sqrt{1 + x^2}}$

d)  $\int \frac{x dx}{(x + 2)(x + 5)}$

h)  $\int \tan^3 x dx$

l)  $\int \frac{(x + 1)dx}{\sqrt{x^2 - 2x - 1}}$

**Bài 41.** Tính các tích phân

a)  $\int \frac{x^4 dx}{x^{10} - 1}$

d)  $\int \sin^{n-1} x \sin(n + 1)x dx, n \in \mathbb{N}^*$

b)  $\int x \sqrt{-x^2 + 3x - 2} dx$

e)  $\int e^{-2x} \cos 3x dx$

c)  $\int \frac{dx}{(x^2 + 2x + 5)^2}$

f)  $\int \arcsin^2 x dx$

**Bài 42.** Lập công thức truy hồi tính  $I_n, n \in \mathbb{N}$

a)  $I_n = \int x^n e^x dx$

b)  $I_n = \int \sin^n x dx$

c)  $I_n = \int \frac{dx}{\cos^n x}$

## 2.2 Tích phân xác định

**Bài 43.** Tính các đạo hàm

a)  $\frac{d}{dx} \int_x^y e^{t^2} dt$

b)  $\frac{d}{dy} \int_x^y e^{t^2} dt$

c)  $\frac{d}{dx} \int_{x^2}^{x^3} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$

**Bài 44.** Dùng định nghĩa và cách tính tích phân xác định, tìm các giới hạn

a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{n\alpha} + \frac{1}{n\alpha + \beta} + \frac{1}{n\alpha + 2\beta} + \cdots + \frac{1}{n\alpha + (n-1)\beta} \right], (\alpha, \beta > 0)$

b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left( \sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{1 + \frac{2}{n}} + \cdots + \sqrt{1 + \frac{n}{n}} \right)$

**Bài 45.** Tính các giới hạn

a)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{\sin x} \sqrt{\tan t} dt}{\int_0^{\tan x} \sqrt{\sin t} dt}$

b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x (\arctan t)^2 dt}{\sqrt{x^2 + 1}}$

c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left( \int_0^x e^{t^2} dt \right)^2}{\int_0^x e^{2t^2} dt}$

**Bài 46.** Tính các tích phân sau

a)  $\int_{1/e}^e |\ln x| (x+1) dx$

d)  $\int_0^1 \frac{\sin^2 x \cos x}{(1 + \tan^2 x)^2} dx$

b)  $\int_1^e (x \ln x)^2 dx$

e)  $\int_0^3 \arcsin \sqrt{\frac{x}{1+x}} dx$

c)  $\int_0^{3\pi/2} \frac{dx}{2 + \cos x}$

f)  $\int_0^{\pi/2} \cos^n x \cos nx dx, n \in \mathbb{N}^*$

**Bài 47.** Chứng minh rằng nếu  $f(x)$  liên tục trên  $[0, 1]$  thì

a)  $\int_0^{\pi/2} f(\sin x) dx = \int_0^{\pi/2} f(\cos x) dx$

b)  $\int_0^{\pi} x f(\sin x) dx = \int_0^{\pi} \frac{\pi}{2} f(\sin x) dx$

Áp dụng tính các tích phân sau

1.  $\int_0^{\pi} \frac{x \sin x dx}{1 + \cos^2 x}$

2.  $\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin x} dx}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}}$

**Bài 48.** Cho  $f(x), g(x)$  là hai hàm số khả tích trên  $[a, b]$ . Chứng minh bất đẳng thức (với  $a < b$ )

$$\left( \int_a^b f(x)g(x) dx \right)^2 \leq \left( \int_a^b f^2(x) dx \right) \left( \int_a^b g^2(x) dx \right)$$

(Bất đẳng thức Cauchy-Schwartz)



## 2.3 Tích phân suy rộng

**Bài 49.** Xét sự hội tụ và tính (trong trường hợp hội tụ) các tích phân sau

a)  $\int_{-\infty}^0 xe^x dx$

c)  $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$

b)  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2}$

d)  $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+3x+2}$

**Bài 50.** Xét sự hội tụ của các tích phân sau

a)  $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x) dx}{x^2}$

d)  $\int_0^1 \frac{dx}{\tan x - x}$

h)  $\int_0^{+\infty} \frac{x - \sin x}{\sqrt{x^7}} dx$

b)  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x+x^3}}$

e)  $\int_0^1 \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt{1-x^4}}$

i)  $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x dx}{\sqrt{x^3}}$

f)  $\int_0^{\pi} \frac{dx}{\sqrt[3]{\sin x}}$

c)  $\int_2^{+\infty} \frac{x dx}{\ln^3 x}$

g)  $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+3x)}{x\sqrt{x}} dx$

j)  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin 2x}{x} dx$

**Bài 51.** Nếu  $\int_0^{+\infty} f(x) dx$  hội tụ thì có suy ra được  $f(x) \rightarrow 0$  khi  $x \rightarrow +\infty$  không? Xét ví dụ  $\int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx$ .

**Bài 52.** Cho hàm  $f(x)$  liên tục trên  $[a, +\infty)$  và  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A \neq 0$ . Hỏi  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  có hội tụ không.

## 2.4 Ứng dụng của tích phân xác định

**Bài 53.** Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi

a) Parabol  $y = x^2 + 4$  và đường thẳng  $x - y + 4 = 0$

b) Đường cong  $y = x^3$  và các đường  $y = x, y = 4x, (x \geq 0)$

c) Đường tròn  $x^2 + y^2 = 2x$  và parabol  $y^2 = x, (y^2 \leq x)$

d) Đường  $y^2 = x^2 - x^4$

**Bài 54.** Tính thể tích của vật thể là phần chung của hai hình trụ  $x^2 + y^2 \leq a^2$  và  $y^2 + z^2 \leq a^2$ , ( $a > 0$ ).

**Bài 55.** Tìm thể tích vật thể giới hạn bởi mặt cong  $z = 4 - y^2$ , các mặt phẳng tọa độ  $x = 0, z = 0$  và mặt phẳng  $x = a$  ( $a \neq 0$ ).

**Bài 56.** Tính thể tích khối tròn xoay tạo nên khi quay hình giới hạn bởi các đường  $y = 2x - x^2$  và  $y = 0$

a) quanh trục  $Ox$  một vòng

b) quanh trục  $Oy$  một vòng

**Bài 57.** Tính độ dài đường cong

a)  $y = \ln \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$  khi  $x$  biến thiên từ 1 đến 2

b)  $\begin{cases} x = a \left( \cos t + \ln \tan \frac{t}{2} \right) \\ y = a \sin t \end{cases}$  khi  $t$  biến thiên từ  $\frac{\pi}{3}$  đến  $\frac{\pi}{2}$ , ( $a > 0$ )

**Bài 58.** Tính diện tích mặt tròn xoay tạo nên khi quay các đường sau

a)  $y = \sin x, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$  quay quanh trục  $Ox$

b)  $y = \frac{1}{3}(1 - x)^3, 0 \leq x \leq 1$  quay quanh trục  $Ox$