Chương 2
PHÉP TÍNH TÍCH PHÂN HÀM MỘT BIẾN SỐ

VIỆN TOÁN ỨNG DỤNG VÀ TIN HỌC
ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI

Ngày 1 tháng 8 năm 2023

Nội dung

Nguyên hàm của hàm số

Định nghĩa 1

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên khoảng (a, b). Hàm số $F(x)$ được gọi là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên khoảng (a, b) nếu $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in (a, b)$.

Định lý 1.1

Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên khoảng (a, b), thì:

a) *Hàm số $F(x) + C$ cũng là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$,*

b) *Ngược lại, mọi nguyên hàm của hàm số $f(x)$ đều viết được dưới dạng $F(x) + C$, trong đó C là một hằng số.*

Định nghĩa 2

Tích phân bất định của một hàm số $f(x)$ là họ các nguyên hàm $F(x) + C$, với $x \in (a, b)$, trong đó $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ và C là một hằng số bất kỳ. TPBĐ của hàm số $f(x)$ được ký hiệu là $\int f(x)dx$.

Các tính chất của tích phân bất định

a) Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên (a, b) thì tồn tại $\int f(x)dx$ trên (a, b),

b) $\left[\int f(x)dx\right]' = f(x)$

c) $\int F'(x)dx = F(x) + C$

d) $\int af(x)dx = a\int f(x)dx$, ($a$ là hằng số khác 0)

e) $\int [f(x) + g(x)]\, dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

Hai tính chất cuối cùng là tính chất tuyến tính của tích phân bất định, ta có thể viết chung

$$\int [\alpha f(x) + \beta g(x)]\, dx = \alpha\int f(x)dx + \beta\int g(x)dx,$$

trong đó α, β là các hằng số không đồng thời bằng 0.

Một số công thức tích phân thông dụng

a) $\displaystyle\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, (\alpha \neq -1),$

b) $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C,$

c) $\displaystyle\int \sin x dx = -\cos x + C,$

d) $\displaystyle\int \cos x dx = \sin x + C,$

e) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C,$

f) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C,$

g) $\displaystyle\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, (0 < a \neq 1),$

h) $\displaystyle\int e^x dx = e^x + C,$

i) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C,$

j) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C.$

Các phương pháp tính tích phân bất định

Phương pháp đổi biến $t = \psi(x)$

Nếu $f(x) = g\left[\psi(x)\right]\psi'(x)$ thì có thể đặt $t = \psi(x)$,

$$\int f(x)dx = \int g\left[\psi(x)\right]\psi'(x)dx = \int g(t)dt.$$

Nếu hàm số $g(t)$ có nguyên hàm là hàm số $G(t)$ thì

$$I = G\left[\psi(x)\right] + C.$$

Ví dụ 1.1

Tính tích phân

a) $\displaystyle\int x(1-x^2)^{2023}dx$

b) $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^x+1}dx$

c) $\displaystyle\int x^{x+1}\left(1+\frac{1}{x}+\ln x\right)dx.$

d) $\displaystyle\int x^{x-1}\left(1-\frac{1}{x}+\ln x\right)dx.$

a)

$$\int x(1-x^2)^{2023}dx$$

$$\int x(1-x^2)^{2023}dx = \frac{1}{2}\int -(1-x^2)^{2023}d(1-x^2) = -\frac{(1-x^2)^{2024}}{4048} + C.$$

b)

$$\int \frac{e^x}{e^x+1}dx$$

$$\int \frac{e^x}{e^x+1}dx = \int \frac{d(e^x+1)}{e^x+1} = \ln(e^x+1) + C.$$

Các phương pháp tính tích phân bất định

Xét tích phân $I = \int f(x)dx$. Để tính tích phân này, ta tìm cách chuyển sang tính tích phân khác của một hàm số khác bằng một phép đổi biến $x = \varphi(t)$ sao cho biểu thức dưới dấu tích phân đối với biến t có thể tìm được nguyên hàm một cách đơn giản hơn.

Phương pháp đổi biến $x = \varphi(t)$

$$\int f(x)dx = \int f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)dt$$

Nếu hàm số $g(t) = f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)$ có nguyên hàm là hàm $G(t)$, và $t = h(x)$ là hàm số ngược của hàm số $x = \varphi(t)$ thì

$$I = \int g(t)dt = G(t) + C = G\left[h(x)\right] + C.$$

Ví dụ 1.2

Tính $\int \sqrt{1-x^2}dx.$

Lời giải: Đặt $x = \cos t$ với $0 \leq t \leq \pi$. Khi đó $dx = -2\sin t dt$ và $\sqrt{1-x^2} = \sin t$. Nên

$$\int \sqrt{1-x^2}dx = \int -\sin^2 t dt = -\int \frac{1-\cos t(2t)}{2} = -\frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4} + C = -\frac{t}{2} + \frac{\sin t \cos t}{2}$$
$$= -\frac{\arcsin x}{2} + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + C.$$

Phương pháp tích phân từng phần

Công thức

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

Khi nào tích phân từng phần?

a) $\int P_n(x) e^{kx} dx, \int P_n(x) \sin kx dx, \int P_n(x) \cos kx dx$, chọn $u = P_n(x)$.

b) $\int P_m(x) \ln^n x dx$, chọn $u = \ln^n x$.

c) $\int P_n(x) \arctan kx dx$, chọn $u = \arctan kx$.

d) $\int P_n(x) \arcsin kx dx$, chọn $u = \arcsin kx$.

Phương pháp tích phân từng phần

Ví dụ 1.3 (Giữa kì, K61)

Tính tích phân

a) $\displaystyle\int x^3 \arctan x dx.$

b) $\displaystyle\int x^3 \operatorname{arccot} x dx.$

c) $\displaystyle\int x^2 \sin 2x dx.$

d) $\displaystyle\int x^2 \cos 2x dx.$

Tích phân hàm phân thức hữu tỉ

Định nghĩa 3

a) *Phân thức hữu tỷ: là một hàm số có dạng* $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, *trong đó* $P(x), Q(x)$ *là các đa thức của* x.

b) *Phân thức hữu tỷ thực sự:* $\deg P(x) < \deg Q(x)$.

Bằng phép chia đa thức, chia $P(x)$ cho $Q(x)$ ta luôn đưa được một hàm phân thức hữu tỷ về dạng

$$f(x) = H(x) + \frac{r(x)}{Q(x)}$$

trong đó $H(x)$ là đa thức thương, $r(x)$ là phần dư trong phép chia. Khi đó $\dfrac{r(x)}{Q(x)}$ là một phân thức hữu tỷ thực sự.

Tích phân hàm phân thức hữu tỉ

Phân tích một phân thức hữu tỷ thực sự $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ thành tổng (hiệu) của các phân thức hữu tỷ thực sự có mẫu số là đa thức bậc nhất hoặc bậc hai vô nghiệm.

a) Phân tích đa thức ở mẫu số $Q(x)$

$$Q(x) = (x-\alpha_1)^{a_1}...(x-\alpha_m)^{a_m}(x^2+p_1x+q_1)^{b_1}...(x^2+p_nx+q_n)^{b_n}.$$

b) Nếu trong phân tích của $Q(x)$ xuất hiện $(x-\alpha)^a$, thì trong phân tích của phân thức $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ xuất hiện các hạng tử dạng $\dfrac{A_i}{(x-\alpha)^i}$, $1 \le i \le a$.

c) Nếu trong phân tích của $Q(x)$ xuất hiện $(x^2+px+q)^b$, thì trong phân tích của phân thức $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ xuất hiện các hạng tử dạng $\dfrac{B_jx+C_j}{(x^2+px+q)^j}$, $1 \le j \le b$.

Tích phân hàm phân thức hữu tỉ

Việc dùng phương pháp hệ số bất định dẫn chúng ta tới việc tính bốn loại tích phân hữu tỷ cơ bản sau:

I. $\displaystyle\int \frac{Adx}{x-a}$

II. $\displaystyle\int \frac{Adx}{(x-a)^k}$

III. $\displaystyle\int \frac{(Mx+N)dx}{x^2+px+q}$

IV. $\displaystyle\int \frac{(Mx+N)dx}{(x^2+px+q)^m}$

Tích phân hàm lượng giác

Phương pháp chung

Xét tích phân $\int R(\sin x, \cos x)dx$, trong đó hàm dưới dấu tích phân là một biểu thức hữu tỷ đối với $\sin x, \cos x$. Ta có thể sử dụng phép đổi biến tổng quát $t = \tan\dfrac{x}{2}$, khi đó

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \tan x = \frac{2t}{1-t^2}, dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

tích phân đang xét được đưa về tích phân của phân thức hữu tỉ của biến t.

Ví dụ 1.4

$$\int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}.$$

Lời giải: Đặt $t = \tan\frac{x}{2}$. Khi đó

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \tan x = \frac{2t}{1-t^2}, dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

Nên $1+\sin x+\cos x = \dfrac{2+2t}{1+t^2}$. Suy ra

$$\int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x} = \int \frac{dt}{t+1} = \ln|t+1| + C = \ln|1+\arctan\frac{x}{2}| + C.$$

Tích phân hàm lượng giác

Tích phân $\int R(\sin x, \cos x)dx$ có dạng đặc biệt

a) Đặt $t = \cos x$ nếu $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$.

b) Đặt $t = \sin x$ nếu $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$.

c) Đặt $t = \tan x$ nếu $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$.

Ví dụ 1.5

a) $\int \sin^2 x \cos^3 x dx$

b) $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x} dx$

c) $\int \frac{\cos 2x dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}$

d) $\int \frac{\sin 2x dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}$

e) $\int \sin x \sin 2x \sin 3x dx$

g) $\int \frac{dx}{(\sin x + \cos x)^2}$

h) $\int \frac{dx}{1 + \cos^2 x}$

i) $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 2 \sin x \cos x - \cos^2 x}$

j) $\int \frac{2 \sin x + 3 \cos x}{3 \sin x + 2 \sin x} dx$

Tích phân hàm lượng giác

Tích phân dạng $\int \sin^m x \cos^n x dx$

a) Nếu m là số nguyên dương lẻ, ta đặt $t = \cos x$.

b) Nếu n là số nguyên dương lẻ, ta đặt $t = \sin x$.

c) Nếu m, n là các số nguyên dương chẵn, ta sử dụng công thức hạ bậc:

$$\sin^2 x = (1 - \cos 2x)/2, \cos^2 x = (1 + \cos 2x)/2.$$

Ví dụ 1.6

a) $\int \sin^2 x \cos^2 x dx$

b) $\int \sin^2 x \cos^4 x dx$

c) $\int \sin^3 x \cos^4 x dx$

d) $\int \sin^4 x \cos^3 x dx$

a)

$$\int \sin^2 x \cos^2 x dx.$$

Lời giải: Có

$$\sin^2 x \cos^2 x = \frac{\sin^2 2x}{4} = \frac{1 - \cos 4x}{8}.$$

Nên

$$\int \sin^2 x \cos^2 x dx = \int \frac{1 - \cos 4x}{8} dx = \frac{x}{8} - \frac{\sin 4x}{32} + C.$$

b)

$$\int \sin^2 x \cos^4 x dx.$$

Lời giải: Có

$$\sin^2 x \cos^4 x = \frac{\sin^2 2x \cos^2 x}{4} = \frac{(1-\cos 4x)(1+cos2x)}{16} = \frac{1}{16} - \frac{\cos 4x}{16} + \frac{\cos 2x}{16} - \frac{\cos 2x \cos 4x}{16}$$
$$= \frac{1}{16} - \frac{\cos 4x}{16} + \frac{\cos 2x}{16} - \frac{\cos 6x + \cos 2x}{32} = \frac{1}{16} + \frac{\cos 2x}{32} - \frac{\cos 4x}{16} - \frac{\cos 6x}{32}.$$

Nên

$$\int \sin^2 x \cos^4 x dx = \int \left(\frac{1}{16} + \frac{\cos 2x}{32} - \frac{\cos 4x}{16} - \frac{\cos 6x}{32}\right) dx = \frac{x}{16} + \frac{\sin 2x}{64} - \frac{\sin 4x}{64} - \frac{\sin 6x}{192} + C.$$

c)

$$\int \sin^3 x \cos^4 x dx.$$

Lời giải: Đặt $t = \cos x$. Khi đó $dt = -\sin x dx$. Nên

$$\int \sin^3 x \cos^4 x dx = \int \sin^2 x \cos^4 x \sin x dx = \int (1 - t^2) t^4 (-dt) = \int (t^6 - t^4) dt = \frac{t^7}{7} - \frac{t^5}{5} + C$$
$$= \frac{\cos^7 x}{7} - \frac{\cos^5 x}{5} + C.$$

d)

$$\int \sin^4 x \cos^3 x dx.$$

Lời giải: Đặt $t = \sin x$. Khi đó $dt = \cos x dx$. Nên

$$\int \sin^4 x \cos^3 x dx = \int \sin^4 x \cos^2 x \cos x dx = \int t^4(1 - t^2)dt = \int (t^4 - t^6)dt = \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + C$$
$$= \frac{\sin^5 x}{5} - \frac{\sin^7 x}{7} + C.$$

Tích phân các biểu thức vô tỷ

Xét tích phân có dạng $\int R(x, \sqrt{\alpha^2 \pm x^2})dx$, $\int R(x, \sqrt{x^2 - \alpha^2})dx$.

Đổi biến số lượng giác

a) Đặt $x = \alpha \tan t$ đối với tích phân $\int R(x, \sqrt{\alpha^2 + x^2})dx$.

b) Đặt $x = \alpha \sin t$ đối với tích phân $\int R(x, \sqrt{\alpha^2 - x^2})dx$.

Ví dụ 1.7

Tính a) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$, *b)* $\int \sqrt{a^2 - x^2}dx$.

Phép thế Euler

Đặt $t = x + \sqrt{x^2 + a}$ đối với tích phân $\int R(x, \sqrt{x^2 + a})dx$.

Ví dụ 1.8

Tích phân các biểu thức vô tỷ

Bốn tích phân cơ bản

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right| + C$

b) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$

c) $\displaystyle\int \sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C$

d) $\displaystyle\int \sqrt{x^2+a}dx = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2+a} + a\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|\right] + C$

Ví dụ 1.9

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$

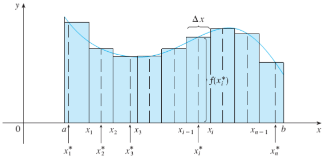
b) $\displaystyle\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+x+1}}$

c) $\displaystyle\int \sqrt{x^2-5x+6}dx$

d) $\displaystyle\int x\sqrt{-x^2+3x-2}.$

Nội dung

Định nghĩa tích phân xác định



i) Chia $[a, b]$ thành n khoảng nhỏ bởi $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$.

ii) Chọn $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$ và thành lập TTP

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i^*) \triangle x_i \text{ với } \triangle x_i = x_i - x_{i-1}$$

Định nghĩa 4

$$\lambda = \max_{1 \le i \le n} \triangle x_i, \quad \int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \to 0} S_n.$$

a) *Giới hạn không phụ thuộc vào cách chia đoạn* $[a, b]$,

b) *Giới hạn không phụ thuộc vào cách chọn điểm* x_i^*.

Định nghĩa tích phân xác định

a) Kí hiệu của tích phân $\int$ được giới thiệu bởi Leibniz. Nó là chữ S được viết kéo dài, và được chọn làm kí hiệu vì tích phân chính là giới hạn của "Tổng".

b) Tích phân xác định $\int_a^b f(x)dx$ là một số thực, nó không phụ thuộc vào x:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b f(t)dt.$$

c) Nếu hàm số $f(x)$ có $\int_a^b f(x)dx < \infty$ thì ta nói hàm f là khả tích trên khoảng $[a, b]$. Không phải hàm số nào cũng khả tích.

Định lý 2.1

Nếu hàm số $f(x)$ là liên tục trên $[a, b]$ (hoặc là chỉ có một số hữu hạn các điểm gián đoạn loại I thì hàm f là khả tích trên $[a, b]$.

Các tính chất của tích phân xác định

- Tính chất 1. $\displaystyle\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx.$
- Tính chất 2. $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$
- Tính chất 3.

  a) Nếu $f(x) \geq 0, \forall x \in [a, b]$ thì $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \geq 0.$

  b) Nếu $f(x)$ khả tích trên $[a, b]$ thì $|f(x)|$ khả tích trên $[a, b]$ và $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$

  c) Nếu $m \leq f(x) \leq M,\ \forall x \in [a, b]$ thì $\displaystyle m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$

Các tính chất của tích phân xác định

- Tính chất 4.(Định lý trung bình thứ nhất)
  Giả sử $f(x)$ liên tục trên $[a,b]$, khi đó tồn tại $c \in [a,b]$ sao cho:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

- Tính chất 5.(Định lý trung bình thứ hai)
  Giả thiết

  a) $f(x)$ liên tục trên $[a,b]$ và $f(x)g(x)$ khả tích trên $[a,b]$.
  b) $g(x)$ không đổi dấu trên $[a,b]$.

  Khi đó tồn tại $c \in [a,b]$ sao cho:

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int\limits_a^b g(x)dx.$$

Hai Định lý cơ bản của tích phân

Hàm tích phân

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, \qquad G(x) = \int_a^{g(x)} f(t)dt.$$

Định lý 2.2

a) Nếu f khả tích trên $[a, b]$ thì $F(x)$ liên tục trên $[a, b]$.

b) Nếu f liên tục tại $x_0 \in [a, b]$ thì $F(x)$ có đạo hàm tại x_0 và $F'(x_0) = f(x_0)$.

Định lý 2.3 (Công thức Newton-Leibniz)

Nếu $f(x)$ liên tục trong khoảng đóng $[a, b]$ và $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ thì

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Các phương pháp tính tích phân xác định

Đổi biến $x = \varphi(t)$

a) $\varphi(t)$ có đạo hàm liên tục trong $[a, b]$.

b) $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$.

c) Khi t biến thiên từ α đến β thì $x = \varphi(t)$ biến thiên liên tục từ a đến b.

Khi đó: $$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt.$$

Ví dụ 2.1

Tính

$$\int_0^1 \sqrt{4-x^2}dx.$$

Lời giải: Đặt $x = 2\cos t$ với $t \in [\pi/3, \pi/2]$. Khi $x = 0$ thì $t = \pi/2$. Khi $x = 1$ thì $t = \pi/3$. Ta có $dx = -2\sin t dt$ và $\sqrt{4-x^2} = 2\sin t$. Nên

$$\int_0^1 \sqrt{4-x^2}dx = \int_{\pi/2}^{\pi/3} 2\sin t(-2\sin t)dt = \int_{\pi/3}^{\pi/2} 4\sin^2 t dt = \int_{\pi/3}^{\pi/2} 2(1-\cos 2t)dt = 2t - \sin 2t\Big|_{\pi/3}^{\pi/2} = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Các phương pháp tính tích phân xác định

Đổi biến $t := \varphi(x)$

Giả sử tích phân cần tính có dạng $I = \int\limits_a^b f[\varphi(x)].\varphi'(x)dx$. Trong đó $\varphi(x)$ biến thiên đơn điệu ngặt và có đạo hàm liên tục trên $[a, b]$. Khi đó:

$$\int\limits_a^b f[\varphi(x)].\varphi'(x)dx = \int\limits_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)dt.$$

Sử dụng các phép truy hồi, quy nạp.

Ví dụ 2.2

Tính

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^2 x dx.$$

Lời giải: Có

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\cos^2 x d\cos x = -\frac{\cos^3 x}{3}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}.$$

Ví dụ 2.3

Tính

$$\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \cos nx dx.$$

Một số đẳng thức tích phân quan trọng

Đẳng thức 1

Chứng minh rằng nếu $f(x)$ liên tục trên $[a, b]$ thì:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b f(a+b-x)dx.$$

Áp dụng, tính

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}dx, \quad \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt[2017]{\sin x}}{\sqrt[2017]{\sin x}+\sqrt[2017]{\cos x}}dx, \quad \int\limits_0^{\pi} x\sin^3 x dx.$$

Đẳng thức 2

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = \begin{cases} 0 & \text{nếu } f(x) \text{ là hàm số lẻ trên } [-a, a] \\ 2\int\limits_0^a f(x)dx & \text{nếu } f(x) \text{ là hàm số chẵn trên } [-a, a] \end{cases}$$

Một số đẳng thức tích phân quan trọng

Đẳng thức 3

Cho $f(x)$ liên tục, chẵn trên $[-a, a]$, chứng minh

$$\int_{-a}^{a} \frac{f(x)dx}{1+b^x} = \int_{0}^{a} f(x)dx \text{ với } 0 \leq b \neq 1$$

Áp dụng tính

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{(x^2+1)(e^x+1)}dx, \quad \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2^x \cos 2x}{2002^x + 2^x}dx, \quad \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2 \mid \sin x \mid}{1+2^x}dx.$$

Nội dung

Tích phân suy rộng với cận vô hạn

Giả sử $f(x)$ là hàm số xác định trên khoảng $[a, +\infty)$, khả tích trên mọi đoạn hữu hạn $[a, A]$.

Định nghĩa 5

a) $$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A\to+\infty} \int_a^A f(x)dx.$$

b) *Nếu giới hạn này tồn tại hữu hạn ta nói tích phân suy rộng* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *hội tụ.*

c) *Ngược lại, ta nói tích phân đó phân kỳ.*

Ví dụ 3.1

Xét sự hội tụ và tính giá trị của tích phân $I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$, $J = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$.

Tích phân suy rộng với cận vô hạn

Tương tự ta định nghĩa tích phân của một hàm số $f(x)$ trên các khoảng $(-\infty, a]$ và $(-\infty, +\infty)$ bởi các công thức sau

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \lim_{A \to -\infty} \int_{A}^{a} f(x)dx \text{ và } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{A \to +\infty \\ A' \to -\infty}} \int_{A'}^{A} f(x)dx$$

Ta có thể viết

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{a}^{+\infty} f(x)dx + \int_{-\infty}^{a} f(x)dx$$

nếu hai tích phân sau hội tụ.

Ví dụ 3.2

Tính giá trị của tích phân $I = \int_{-\infty}^{0} xe^{x} dx.$

Tích phân suy rộng của hàm số không bị chặn

Giả sử $f(x)$ là hàm số

i) xác định trên khoảng $[a, b)$,

ii) khả tích trên mọi đoạn $[a, t]$, ($t < b$ bất kỳ),

iii) $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = \pm\infty$.

Điểm $x = b$ được gọi là điểm bất thường (điểm kỳ dị) của hàm số $f(x)$.

Định nghĩa 6

a) $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)dx.$

b) Nếu giới hạn ở vế phải tồn tại, ta nói tích phân suy rộng hội tụ.

c) Ngược lại, ta nói tích phân phân kỳ.

Tích phân suy rộng của hàm số không bị chặn

Tương tự ta định nghĩa tích phân suy rộng của hàm số $f(x)$ không bị chặn trên khoảng $(a, b]$ và (a, b) lần lượt nhận $x = a$ và $x = b$ làm điểm bất thường.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \to a^+} \int_t^b f(x)dx \text{ và } \int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{t \to a^+, \\ t' \to b^-}} \int_t^{t'} f(x)dx.$$

Đối với tích phân có hai điểm bất thường $x = a, x = b$, ta có thể viết

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,$$

nếu hai tích phân sau hội tụ.

Ví dụ 3.3

Xét sự hội tụ và tính giá trị của tích phân $I = \int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}, \; J = \int_0^1 \ln x dx, \; K = \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{2x - x^2}}.$

Tích phân suy rộng hội tụ tuyệt đối và bán hội tụ

Định lý 3.1

Nếu $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx$ *hội tụ thì* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ *hội tụ. Điều ngược lại không đúng.*

Định nghĩa 7

a) *Nếu* $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx$ *hội tụ thì ta nói* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ *hội tụ tuyệt đối,*

b) *Nếu* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ *hội tụ nhưng* $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx$ *phân kì thì ta nói* $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx$ *bán hội tụ.*

Tích phân suy rộng hội tụ tuyệt đối và bán hội tụ

Định lý 3.2

Nếu $\int\limits_a^b |f(x)|dx$ *(có điểm bất thường là* a *hoặc* b*) hội tụ thì* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ *cũng hội tụ. Điều ngược lại không đúng.*

Định nghĩa 8

Nếu $\int\limits_a^b |f(x)|dx$ *(có điểm bất thường là* a *hoặc* b*) hội tụ thì ta nói* $\int\limits_a^b f(x)dx$ *hội tụ tuyệt đối, còn nếu* $\int\limits_a^b f(x)dx$ *hội tụ nhưng* $\int\limits_a^b |f(x)|dx$ *phân kì thì ta nói* $\int\limits_a^b |f(x)|dx$ *bán hội tụ.*

Ví dụ 3.4

Chứng minh rằng các tích phân $\int\limits_1^{\infty} \frac{\sin x}{x}dx,\quad \int\limits_1^{\infty} \frac{\cos x}{x}dx$ *là bán hội tụ.*

Các tiêu chuẩn hội tụ

Định lý 3.3 (Tiêu chuẩn so sánh 1)

Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ khả tích trên mọi khoảng hữu hạn $[a, A]$ và

$$0 \leq f(x) \leq g(x), x \geq a.$$

Khi đó

a) *Nếu* $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ *hội tụ thì* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ *hội tụ,*

b) *Nếu* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ *phân kỳ thì* $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ *phân kỳ.*

Các tiêu chuẩn hội tụ

Định lý 3.4 (Tiêu chuẩn so sánh 2)

Giả sử $f(x)$ *và* $g(x)$ *là hai hàm số khả tích trên mọi đoạn hữu hạn* $[a, A]$ *và* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = k$

1) *TH1:* $0 < k < +\infty$, *các tích phân* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ *và* $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ *hoặc cùng hội tụ, hoặc cùng phân kỳ.*

2) *Th2:* $k = 0$

   a) *Nếu* $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ *hội tụ thì* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ *hội tụ,*

   b) *Nếu* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ *phân kỳ thì* $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ *phân kỳ.*

Các tiêu chuẩn hội tụ

Định lý 3.5 (Tiêu chuẩn so sánh)

1) *Cho hai hàm số* $f(x)$ *và* $g(x)$ *có cùng điểm bất thường là* $x = a$ *sao cho* $0 \leq f(x) \leq g(x), \forall x \in (a, b]$. *Khi đó*

   a) *Nếu* $\int\limits_a^b g(x)dx$ *hội tụ thì* $\int\limits_a^b f(x)dx$ *hội tụ*

   b) *Nếu* $\int\limits_a^b f(x)dx$ *phân kỳ thì* $\int\limits_a^b g(x)dx$ *phân kỳ.*

2) *Giả sử* $f(x)$ *và* $g(x)$ *có cùng điểm bất thường* $x = a$. *Nếu tồn tại giới hạn*

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = k \ (0 < k < +\infty)$$

thì đó các tích phân $\int\limits_a^b f(x)dx$ *và* $\int\limits_a^b g(x)dx$ *hoặc cùng hội tụ, hoặc cùng phân kỳ.*

Một số VD minh họa dùng TCSS

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} \begin{cases} \text{hội tụ nếu} & \alpha > 1 \\ \text{phân kì nếu} & \alpha \le 1 \end{cases}, \qquad \int_a^{b} \frac{dx}{(x-a)^\alpha} \begin{cases} \text{hội tụ nếu } \alpha < 1 \\ \text{phân kì nếu } \alpha \ge 1 \end{cases}$$

Ví dụ 3.5

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt{1-x^4}}dx,$

b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x dx}{x^2},$

c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt[3]{x}}{e^{\sin x}-1}dx,$

d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\tan x - x},$

e) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x+x^3}},$

f) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^2dx}{x^4+x^2+1},$

g) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+\sqrt{x})}{1-\cos x}dx,$

h) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{dx}{\sin^p x},$

i) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos x}{\sin^k x}dx,$

j) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos x - \cos 2x}{x^2\ln(1+\sqrt{x})}dx,$

k) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}dx}{4^x - e^x},$

l) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^3-1}}dx$

Nội dung

Tính diện tích hình phẳng

Hình thang cong:

$$\text{Nếu } S \begin{cases} a \le x \le b \\ y = f(x) \\ y = g(x) \\ f, g \in C[a,b] \end{cases} \quad \text{thì } \boxed{S = \int_a^b |\ f(x) - g(x)\ |\ dx} \qquad (1)$$

$$\text{Nếu } S \begin{cases} c \le y \le d \\ x = \varphi(y) \\ x = \psi(y) \\ \varphi, \psi \in [c,d] \end{cases} \quad \text{thì } \boxed{S = \int_c^d |\ \varphi(y) - \psi(y)\ |\ dy} \qquad (2)$$

Ví dụ 4.1

Tính diện tích của miền $D : \begin{cases} x + y \ge 2 \\ x^2 + y^2 \le 2x. \end{cases}$

Tính diện tích hình phẳng

Trường hợp biên của hình phẳng cho dưới dạng đường cong dạng tham số

$$\text{Nếu } S \text{ giới hạn bởi } \begin{cases} a \le x \le b \\ y = 0 \\ \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \end{cases} \quad \text{thì } \boxed{S = \int\limits_{t_1}^{t_2} \mid \psi(t)\varphi'(t) \mid dt} \tag{3}$$

Trong đó giả thiết rằng phương trình $\varphi(t) = a, \psi(t) = b$ có nghiệm duy nhất là t_1, t_2 và $\varphi, \psi, \varphi' \in C[t_1, t_2]$.

Ví dụ 4.2

Tính diện tích của hình tròn $x^2 + y^2 \leq R^2$.

Lời giải: Nửa trên của hình tròn bị chặn bởi $-1 \leq x \leq 1$, $y = 0$, $x = R\cos t$ và $y = R\sin t$ với $0 \leq t \leq \pi$. Khi đó

$$|y(t)x'(t)| = R^2 \sin^2 t = \frac{R^2(1-\cos 4t)}{2}.$$

Khi đó diện tích nửa trên của hình tròn là

$$S = \int_0^\pi \frac{R^2(1-\cos 4t)}{2} dt = \frac{R^2 t}{2} - \frac{\sin 8t}{8}\Big|_0^\pi = \frac{\pi R^2}{2}.$$

Do đó diện tích của hình tròn là πR^2.

Tính diện tích hình phẳng

Trường hợp biên của hình phẳng cho trong hệ toạ độ cực (tính diện tích của miền có dạng hình quạt)

$$\text{Nếu } S \text{ giới hạn bởi } \begin{cases} \varphi = \alpha \\ \varphi = \beta \\ r = r(\varphi) \\ r(\varphi) \in C[\alpha, \beta] \end{cases} \quad \text{thì } \boxed{S = \frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)d\varphi} \tag{4}$$

Ví dụ 4.3

Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường hình tim $r = 1 + \cos\varphi$.

Tính độ dài đường cong phẳng

Trường hợp đường cong cho bởi phương trình $y = f(x)$

$$\begin{cases} y = f(x) \\ a \le x \le b \\ f'(x) \text{ liên tục} \end{cases} \quad \text{thì} \quad \boxed{s = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}} \tag{5}$$

Ví dụ 4.4

Tính độ dài đường cong $y = \ln \dfrac{e^x + 1}{e^x - 1}$ *khi* x *biến thiên từ* 1 *đến* 2.

Lời giải: Ta có

$$1 + y'^2(x) = \left(\frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1} \right)^2$$

Nên áp dụng công thức 5 ta được:

$$s = \int_1^2 \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1} dx \overset{(t = e^{2x})}{=} \int_{e^2}^{e^4} \frac{t + 1}{2t(t - 1)} dt = \ln \frac{e^2 + 1}{e^2}.$$

Tính độ dài đường cong phẳng

Trường hợp đường cong cho bởi phương trình tham số:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ \alpha \le t \le \beta \\ x'(t), y'(t) \text{ liên tục} \\ x'^2(t) + y'^2(t) > 0, \ \forall t \in [\alpha, \beta] \end{cases}$$

thì $\boxed{s = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}dt}$

Ví dụ 4.5

Tính độ dài đường cong $\begin{cases} x = a\left(\cos t + \ln\tan\dfrac{t}{2}\right) \\ y = a\sin t, \end{cases} \quad \dfrac{\pi}{3} \le t \le \dfrac{\pi}{2}.$

Lời giải: Ta có

$$x'^2(t) + y'^2(t) = a^2.\frac{\cos^2 t}{\sin^2 t} \Rightarrow s = a\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}}dt = a\ln\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Tính độ dài đường cong phẳng

Trường hợp đường cong cho bởi phương trình trong toạ độ cực:

$$\begin{cases} r = r(\varphi) \\ \alpha \le \varphi \le \beta \\ r'(\varphi) \text{ liên tục} \end{cases} \quad \text{thì} \quad \boxed{s = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)} d\varphi} \tag{6}$$

Tính thể tích vật thể

Trường hợp vật thể được giới hạn bởi một mặt cong và hai mặt phẳng $x = a, x = b$. Giả thiết ta biết rằng diện tích S của thiết diện của vật thể khi cắt bởi mặt phẳn $x = x_0$ là $S(x_0)$, và $S(x)$ là hàm số xác định, khả tích trên $[a, b]$. Khi đó

$$\boxed{V = \int_a^b S(x)dx} \tag{7}$$

Ví dụ 4.6

Tính thể tích của vật thể là phần chung của hai hình trụ $x^2 + y^2 = a^2$ *và* $y^2 + z^2 = a^2 (a > 0)$.

Lời giải: Diện tích của vật thể là

$$V = 8\int_0^a (a^2 - x^2)dx = 163a^3$$

Tính thể tích vật thể

Trường hợp vật thể là vật thể tròn xoay được tạo thành khi quay hình thang cong $\begin{cases} a \leq x \leq b \\ y = 0 \\ y = f(x) \end{cases}$ quanh trục Ox, trong đó $f(x)$ liên tục thì

$$\boxed{V = \pi \int\limits_a^b f^2(x)dx} \tag{8}$$

Ví dụ 4.7

Tính thể tích khối tròn xoay tạo nên khi quay hình giới hạn bởi các đường $y = 2x - x^2$ và $y = 0$ quanh trục Ox một vòng.

Lời giải: Giải $2x - x^2 = 0$ được $x = 0$ hoặc $x = 2$. Do đó thể tích khối tròn xoay là

$$V = \pi \int_0^2 (2x - x^2)^2 dx = \pi \int_0^2 (4x^2 - 4x^3 + x^4) dx = \frac{4x^3}{3} - x^4 + \frac{x^5}{5}\Big|_0^2 \pi = \frac{16}{15}\pi.$$

Tính thể tích vật thể

Tương tự, nếú vật thể là vật thể tròn xoay được tạo thành khi quay hình thang cong $\begin{cases} c \le y \le d \\ x = 0 \\ x = \varphi(y) \end{cases}$ quanh trục Oy, thì

$$\boxed{V = \pi \int\limits_c^d \varphi^2(y)dy} \tag{9}$$

Ví dụ 4.8

Tính thể tích khối tròn xoay tạo nên khi quay hình giới hạn bởi các đường $y = 2x - x^2$ *và* $y = 0$ *quanh trục* Oy *một vòng.*

Tính diện tích mặt tròn xoay

Cho đường cong $\begin{cases} a \leq x \leq b \\ y = f(x) \end{cases}$ với $f'(x)$ liên tục. Quay hình thang cong này quanh trục Ox thì ta được một vật thể tròn xoay. Khi đó diện tích xung quanh của vật thể được tính theo công thức:

$$\boxed{S = 2\pi \int\limits_a^b \mid f(x) \mid \sqrt{1 + f'^2(x)} dx} \tag{10}$$

Ví dụ 4.9

Tính diện tích mặt tròn xoay tạo nên khi quay các đường sau $y = \tan x, 0 < x \leq \dfrac{\pi}{4}$, *quanh trục* Ox.

Tính diện tích mặt tròn xoay

Tương tự nếu quay đường cong $\begin{cases} c \leq y \leq d \\ x = \varphi(y) \end{cases}$ với $\varphi'(y)$ liên tục, quanh trục Oy thì:

$$\boxed{S = 2\pi \int\limits_c^d \mid \varphi(y) \mid \sqrt{1 + \varphi'^2(y)}dy} \tag{11}$$

Ví dụ 4.10

Tính diện tích mặt tròn xoay tạo nên khi quay đường $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ *quanh trục* Oy $(a > b > 0)$.