Chương 3
PHÉP TÍNH VI PHÂN HÀM NHIỀU BIẾN SỐ

VIỆN TOÁN ỨNG DỤNG VÀ TIN HỌC
ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI

Ngày 1 tháng 8 năm 2023

Nội dung

Hàm số nhiều biến số

Cho $M(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $N(y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Ký hiệu $d(M, N)$, khoảng cách giữa M và N, là số thực được tính theo công thức

$$d(M,N) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \cdots + (y_n - x_n)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2}.$$

Với $M_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) \in \mathbb{R}^n$ và $\varepsilon > 0$, tập $B(M_0, \varepsilon) = \{M \in \mathbb{R}^n : d(M_0, M) < \varepsilon\}$ được gọi là $\varepsilon-$ lân cận hoặc lân cận bán kính ε của M_0 hoặc hình cầu mở tâm M_0 bán kính ε.
Cho $E \subset \mathbb{R}^n$. Điểm M được gọi là điểm trong của E nếu tồn tại $\varepsilon > 0$ sao cho $B(M, \varepsilon) \subset E$. Điểm $N \in \mathbb{R}^n$ được gọi là điểm biên của E nếu với bất kỳ $\varepsilon > 0$, tập $B(N, \varepsilon)$ đều chứa những điểm thuộc E và điểm không thuộc E. Tập E được gọi là mở nếu mọi điểm của nó đều là điểm trong, gọi là đóng nếu nó chứa mọi điểm biên của nó. Tập $E \subset \mathbb{R}^n$ được gọi bị chặn hay giới nội nếu tồn tại số $N > 0$ sao cho $E \subset B(0, N)$.

Định nghĩa 1

Cho $D \subset \mathbb{R}^n$. Gọi ánh xạ $f : D \to \mathbb{R}$, hay là quy tắc cho tương ứng mỗi $M(x_1, x_1, \ldots, x_n)$ với một $u = f(M) = f(x_1, x_1, \ldots, x_n)$, là một hàm số của n biến số xác định trên D. Tập D được gọi là gọi là miền xác định (hoặc tập xác định) của hàm f và $x_1, x_1, \ldots, x_n$ là các biến số độc lập.
Nếu cho hàm số $u = f(M)$ mà không nói gì về tập xác định của nó thì ta hiểu rằng tập xác định D của hàm số là tập các điểm M sao cho $f(M)$ có nghĩa. Lúc đó, $B = \{f(M) : M \in D\}$ được gọi là miền giá trị của hàm số f.

Ví dụ 1.1

Tìm miền xác định và miền giá trị của các hàm số sau

a) $u = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ *b)* $u = \ln(x + y)$.

a. Tập xác định của hàm số là $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4 - x^2 - y^2 \geq 0\}$ hay $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$. Vậy, tập xác định của hàm số là hình tròn tâm 0 bán kính bằng 2. Dễ thấy miền giá trị của hàm số là $B = [0, 4]$.
b. Tập xác định của hàm số là $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y > 0\}$ hay $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > -x\}$. Vậy, tập xác định của hàm số là nửa mặt phẳng có biên là đường thẳng $y = -x$ và miền giá trị của hàm số là $B = \mathbb{R}$.

Giới hạn của hàm số nhiều biến số

Định nghĩa

Cho hàm số $f(M)$ xác định trong $B(M,\varepsilon) \setminus \{M_0\}$. Hàm số $f(M)$ có giới hạn là L khi $M \to M_0$ nếu:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0: \text{ nếu } 0 < d(M, M_0) < \delta \text{ thì } |f(M) - L| < \varepsilon.$$

Một cách tương đương, nếu với mọi dãy điểm M_n thuộc $B(M,\varepsilon) \setminus \{M_0\}$ dần đến M_0 ta đều có

$$\lim_{n\to+\infty} f(M_n) = L.$$

Khi đó ta viết

$$\lim_{M\to M_0} f(M) = L$$

Khái niệm giới hạn vô hạn cũng được định nghĩa tương tự.

Các định lý về giới hạn của tổng, hiệu, tích, thương đối với hàm số một biến số cũng đúng cho hàm số nhiều biến số.

Giới hạn của hàm số nhiều biến số

Hàm số một biến số:
Khi $x \to x_0$, chỉ có hai hướng là $x \to x_0^+$ và $x \to x_0^-$.

Hàm số nhiều biến số:
Khi $(x, y) \to (x_0, y_0)$, có vô số hướng khác nhau.

Hệ quả

Muốn chỉ ra sự tồn tại của giới hạn của hàm số nhiều biến số là việc không dễ vì phải chỉ ra $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = L$ theo mọi hướng $(x, y) \to (x_0, y_0)$ có thể.

Trong thực hành, muốn tìm giới hạn của hàm số nhiều biến số, phương pháp chứng minh chủ yếu là đánh giá hàm số để dùng **nguyên lý giới hạn kẹp**, đưa về **giới hạn của hàm số một biến số**.

Ví dụ 1.2

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2x^4 + 4y^4}{x^2 + 4y^2}$,

b) Tính $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x \cos \dfrac{y}{x}$.

a) Do $0 \leq \dfrac{2x^4}{x^2+4y^2} \leq 2x^2, \quad 0 \leq \dfrac{4y^4}{x^2+4y^2} \leq y^2$ và sử dụng nguyên lý giới hạn kẹp, ta có

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^4+4y^4}{x^2+4y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^4}{x^2+4y^2} + \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{4y^4}{x^2+4y^2} = 0+0=0.$$

b) Do $\left|x \cos \dfrac{y}{x}\right| \leq x \to 0$ nên giới hạn đã cho bằng 0.

Giới hạn của hàm số nhiều biến số

Hệ quả

Muốn chứng minh sự không tồn tại giới hạn của hàm số nhiều biến số, chỉ cần chỉ ra tồn tại hai quá trình $(x, y) \to (x_0, y_0)$ khác nhau mà $f(x, y)$ tiến tới hai giới hạn khác nhau.

Ví dụ 1.3

Tìm giới hạn (nếu có) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$.

Nếu cho $(x, y) \to (0, 0)$ theo phương của đường thẳng $y = kx$ thì ta có

$$f(x, kx) = \frac{x^2 - k^2x^2}{x^2 + k^2x^2} = \frac{1 - k^2}{1 + k^2} \to \frac{1 - k^2}{1 + k^2} \text{ khi } x \to 0$$

Vậy khi $(x, y) \to (0, 0)$ theo những phương khác nhau thì $f(x, y)$ dần tới những giới hạn khác nhau. Do đó không tồn tại $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$.

Giới hạn của hàm số nhiều biến số

Quy trình tìm $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$

Cho $(x,y) \to (x_0,y_0)$ theo phương của đường thẳng $y - y_0 = k(x - x_0)$.

a) Nếu với k khác nhau giới hạn này khác nhau thì $\nexists \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$.

b) Nếu với k khác nhau, giới hạn này bằng nhau và bằng K thì

Nếu $\exists \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ thì PP chứng minh chủ yếu là đưa về hàm số một biến số và nguyên lý giới hạn kẹp.

Nếu $\nexists \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ thì chỉ ra một quá trình $(x,y) \to (x_0,y_0)$ khác mà giới hạn này khác K.

Ví dụ 1.4

Tính $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ *với*

a) $f(x,y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, *b)* $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$, *c)* $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$.

a) $\left|\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \leq \frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2} \to 0$ nên giới hạn đã cho bằng 0.

b) $f(x,kx) = \dfrac{kx^2}{x^2+k^2x^2} = \dfrac{k}{1+k^2}$. Suy ra giới hạn đã cho không tồn tại

c) Bằng phép đổi biến $y^2 = t$, giới hạn đã cho có dạng b), và do đó, không tồn tại.

Giới hạn của hàm số nhiều biến số

Bài tập 1

Tính $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ *với*

a) $f(x,y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$,

b) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$,

c) $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$,

d) $f(x,y) = \dfrac{3x^2y}{x^2+y^2}$,

e) $f(x,y) = \dfrac{x^4-4y^2}{x^2+2y^2}$,

f) $f(x,y) = \dfrac{y^2\sin^2 x}{x^4+y^4}$.

Bài tập 2

Tính $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x,y,z)$ *với*

a) $f(x,y,z) = \dfrac{xy+yz}{x^2+y^2+z^2}$,

b) $f(x,y,z) = \dfrac{xy+yz^2+xz^2}{x^2+y^2+z^4}$.

Tính liên tục của hàm số nhiều biến số

i) $f(M)$ liên tục tại M_0 nếu $\lim\limits_{M\to M_0} f(M) = f(M_0)$.

ii) $f(M)$ được gọi là liên tục trong miền D nếu nó liên tục tại mọi điểm thuộc D.

Ví dụ 1.5

Xét tính liên tục của hàm số $f(x,y)$ với

a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & \text{\textit{nếu} } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{\textit{nếu} } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

b) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{\textit{nếu} } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{\textit{nếu} } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

a) Ta đã chứng minh được hàm số f không có giới hạn khi $(x, y) \to (0, 0)$ nên nó gián đoạn tại $(0, 0)$.

b) Do hàm số f có giới hạn bằng $f(0, 0)$ khi $(x, y) \to (0, 0)$, nên hàm số liên tục tại điểm này, và do đó, nó liên tục trên toàn bộ miền xác định.

Nội dung

Đạo hàm riêng

Cho hàm số $f(x,y)$ xác định trong một miền D và $M(x_0,y_0) \in D$. Cố định $y = y_0$, nếu hàm số một biến số $g(x) = f(x,y_0)$ có đạo hàm tại điểm $x = x_0$ thì đạo hàm đó gọi là đạo hàm riêng của f với biến x tại M_0 và được kí hiệu là $f'_x(x_0,y_0)$ hoặc $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(x_0+\triangle x, y_0) - f(x_0,y_0)}{\triangle x}.$$

Tương tự,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = \lim_{\triangle y \to 0} \frac{f(x_0, y_0+\triangle y) - f(x_0,y_0)}{\triangle y}.$$

Tính ĐHR theo $x \Rightarrow$ coi y là hằng số.

Tính ĐHR theo $y \Rightarrow$ coi x là hằng số.

Đạo hàm riêng

Các đạo hàm riêng của các hàm số n biến số (với $n \geq 3$) được định nghĩa tương tự. Khi cần tính đạo hàm riêng của hàm số theo biến số nào, xem như hàm số chỉ phụ thuộc vào biến đó, còn các biến còn lại là các hằng số và áp dụng các quy tắc tính đạo hàm như hàm số một biến số.

Ví dụ 2.1

Tính các đạo hàm riêng của hàm số sau

a) $z = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$

b) $z = y^2 \sin\dfrac{x}{y}$

c) $z = x^{y^3}$

d) $u = x^{y^z}, (x, y, z > 0)$

a) $z'_x = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\left(1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$; $z'_y = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{y}{x\sqrt{x^2+y^2}+x^2+y^2}$.

b) $z'_x = y\cos\frac{x}{y}$; $z'_y = 2y\sin\frac{x}{y} - x\cos\frac{x}{y}$.

c) $z'_x = y^3 x^{y^3-1}$; $z'_y = 3y^2 x^{y^3}\ln x$.

d) $u'_x = y^z x^{y^z-1}$; $u'_y = x^{y^z}\ln x\ zy^{z-1}$; $u'_z = x^{y^z}\ln x\ y^z\ln y$.

Đạo hàm riêng

Ví dụ 2.2

Cho hàm số

$$f(x) = \begin{cases} (x^2 + 2y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+2y^2} & \textit{nếu } x^2+y^2 \neq 0, \\ 0 & \textit{nếu } x^2+y^2 = 0. \end{cases}$$

Tính $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

Ta có

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\Delta x\sin\frac{1}{\Delta x^2} = 0$$

và

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y\to 0}2\Delta y\sin\frac{1}{2\Delta y^2} = 0.$$

Vi phân toàn phần

Ta xét hàm số hai biến, (tương tự cho hàm số nhiều biến hơn).

Định nghĩa 1

Cho hàm số $f(x, y)$ *xác định trong lân cận* (x_0, y_0). *Nếu như có thể biểu diễn số gia toàn phần dưới dạng*

$$\triangle f = f(x_0 + \triangle x_0, y_0 + \triangle y_0) - f(x_0, y_0) = A \triangle x + B \triangle y + \alpha \triangle x + \beta \triangle y$$

trong đó A, B *là các hằng số,* $\alpha, \beta \to 0$ *khi* $(x, y) \to (x_0, y_0)$ *thì ta nói hàm số* z *khả vi tại* (x_0, y_0) *và*

$$df(x_0, y_0) = A \triangle x + B \triangle y$$

được gọi là vi phân toàn phần của $z = f(x, y)$ *tại* (x_0, y_0).

Định lý 2.1

Nếu hàm số $f(x, y)$ *có các đạo hàm riêng trong lân cận của* (x_0, y_0) *và nếu các đạo hàm riêng đó liên tục tại* (x_0, y_0) *thì* $f(x, y)$ *khả vi tại* (x_0, y_0) *và*

$$df(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0) \triangle x + f'_y(x_0, y_0) \triangle y$$

Vi phân toàn phần

Đặc biệt, với x, y là biến số độc lập thì $dx = \Delta x, dy = \Delta y$. Lúc đó, ta có

$$df(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)dy.$$

Ví dụ 2.3

Vi phân toàn phần của hàm số $z = e^{x^2+y^2}$ *là* $dz = 2e^{x^2+y^2}(xdx + ydy)$.

Hàm số một biến số:
Khả vi $\Leftrightarrow$ Có đạo hàm

Hàm số nhiều biến số:
Khả vi $\overset{\nLeftarrow}{\Rightarrow}$ Có các đạo hàm riêng

Ví dụ 2.4

Hàm số $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & \text{nếu } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{nếu } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ *có các đạo hàm riêng tại* $(0, 0)$ *bằng* 0 *nhưng không liên tục, và do đó không khả vi tại* $(0, 0)$.

Vi phân toàn phần

Xuất phát từ công thức

$$f(x_0 + \triangle x_0, y_0 + \triangle y_0) - f(x_0, y_0) = A \triangle x + B \triangle y + o(\triangle x) + o(\triangle y)$$

dẫn tới công thức tính gần đúng

Ứng dụng vi phân để tính gần đúng

$f(x_0 + \triangle x, y_0 + \triangle y) \approx f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0) \triangle x + f'_y(x_0, y_0) \triangle y.$

Ví dụ 2.5

Tính gần đúng

a) $A = \sqrt[3]{(1,04)^3 + (2,03)^2 + 3}$ *b)* $B = \ln\left(\sqrt[3]{1,02} + \sqrt[4]{0,99} - 1\right).$

a) Xét hàm $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3+y^2+3}; \Delta x = 0,04; \Delta y = 0,03; x_0 = 1; y_0 = 2$. Ta có

$$f'_x = \frac{1}{3\left(x^3+y^2+3\right)^{2/3}} 3x^2; \quad f'_y = \frac{1}{3\left(x^3+y^2+3\right)^{2/3}} 2y.$$

Khi đó

$$\begin{aligned} A =& f(1+\Delta x, 2+\Delta y) \approx f(1,2) + f'_x(1,2)\Delta x + f'_y(1,2)\Delta y \\ =& 2 + \frac{1}{4}.0,04 + \frac{1}{3}.0,03 = 2,02. \end{aligned}$$

b) Xét hàm

$$f(x,y) = \ln\left(\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{y} - 1\right); x_0 = 1; y_0 = 1; \Delta x = 0,02; \Delta y = -0,01.$$

Ta có

$$f'_x = \frac{1}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{y}-1}.\frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}; \quad f'_y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{y}-1}.\frac{1}{4y^{\frac{3}{4}}}.$$

Khi đó, ta có

$$\begin{aligned} B = f(1+\Delta x, 1+\Delta y) &\approx f(1,1) + f'_x(1,1)\Delta x + f'_y(1,1)\Delta y \\ &= 0 + \frac{1}{3}.0,02 + \frac{1}{4}(-0,01) \approx 0,004. \end{aligned}$$

Đạo hàm của hàm số hợp

Cho $F(x,y) = f(u(x,y), v(x,y))$.

Đạo hàm của hàm số hợp

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x} \\[2ex] \dfrac{\partial F}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y}. \end{cases}$$

Công thức trên có thể được viết dưới dạng ma trận như sau

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial x} & \dfrac{\partial F}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial u} & \dfrac{\partial f}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Đạo hàm của hàm số hợp

Ma trận $\begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}$ được gọi là ma trận Jacobi, định thức của ma trận ấy được gọi là định thức Jacobi và được kí hiệu là $\dfrac{D(u,v)}{D(x,y)}$.

Ví dụ 2.6

a) *Tìm đạo hàm của hàm số hợp sau đây* $z = e^{u^2-2v^2}, u = \cos x, v = \sqrt{x^2+y^2}.$

b) *Cho* f *là hàm số khả vi trên* $\mathbb{R}$, $z(x,y) = f(x^2 - y^2)$. *Tính*

$$A = yz'_x + xz'_y.$$

a) $z'_x = z'_u.u'_x + z'_v.v'_x = -2e^{u^2-2v^2}u.\sin x - 4e^{u^2-2v^2}v\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}.$

b) Áp dụng quy tắc đạo hàm của hàm hợp, ta có

$$z'_x = 2xf'(x^2+y^2), \quad z'_y = -2yf'(x^2+y^2).$$

Vì vậy, $A = yz' + xz'_y = 2xyf'(x^2+y^2) - 2yxf'(x^2+y^2) = 0.$

Đạo hàm và vi phân cấp cao

Cho hàm số hai biến số $z = f(x, y)$. Các đạo hàm riêng của các đạo hàm riêng cấp một nếu tồn tại được gọi là những đạo hàm riêng cấp hai.

$$\begin{cases} (f'_x)'_x = f''_{xx}(x, y) \\ (f'_x)'_y = f''_{xy}(x, y) \\ (f'_y)'_x = f''_{yx}(x, y) \\ (f'_y)'_y = f''_{yy}(x, y) \end{cases}$$

Các đạo hàm riêng của các đạo hàm riêng cấp hai, nếu tồn tại, được gọi là các đạo hàm riêng cấp ba, ...

Ví dụ 2.7

Tính các đạo hàm riêng cấp hai của $z = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2 + y^2)^3}$.

Ta có

$$\begin{cases} z'_x = x\sqrt{x^2 - y^2} \\ z'_y = -y\sqrt{x^2 - y^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z''_{xx} = \sqrt{x^2 - y^2} + x\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2 - y^2}} = \dfrac{2x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 - y^2}} \\ z''_{yy} = -\sqrt{x^2 - y^2} + y\dfrac{2y}{2\sqrt{x^2 - y^2}} = \dfrac{2y^2 - x^2}{\sqrt{x^2 - y^2}} \\ z''_{xy} = \dfrac{-2xy}{2\sqrt{x^2 - y^2}} = \dfrac{-xy}{\sqrt{x^2 - y^2}}. \end{cases}$$

Đạo hàm và vi phân cấp cao

Định lý 2.2 (Schwarz)

Nếu $z = f(x, y)$ *có các đạo hàm riêng* f''_{xy}, f''_{yx} *liên tục trong lân cận của* M *thì*

$$f''_{xy}(M) = f''_{yx}(M).$$

Định nghĩa 2

Xét hàm số $z = f(x, y)$*.*

a) $df = f'_x dx + f'_y dy$*, nếu tồn tại, cũng là một hàm số hai biến số.*

b) Vi phân toàn phần của df*, nếu tồn tại, được gọi là vi phân toàn phần cấp hai của* z *và được kí hiệu là* $d^2 f$*,*

$$d^2 f = f''_{xx} dx^2 + 2 f''_{xy} dx dy + f''_{yy} dy^2.$$

Ví dụ 2.8

Vi phân toàn phần cấp hai của hàm số $z = x^2 y^3$ *là* $d^2 z = 2y^3 dx^2 + 12xy^2 dx dy + 6x^2 y dy^2$*.*

Đạo hàm và vi phân cấp cao

Định nghĩa 3

Cho hàm số $z = f(x, y)$. *Ta định nghĩa*

$$d^n f = d(d^{n-1} f), \quad 2 \leq n \in \mathbb{N}.$$

Công thức tính vi phân cấp cao

Nếu x, y là các biến độc lập ta có

$$d^n f = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^n f.$$

Công thức Taylor-Maclaurin

Định lý 2.3

Cho $f(x,y)$ có các đạo hàm riêng cấp $n+1$ liên tục trong lân cận của điểm (x_0,y_0). Khi đó, với $\Delta x, \Delta y$ đủ nhỏ, tồn tại $\theta \in (0,1)$ sao cho

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) = f(x_0,y_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{d^k f(x_0,y_0)}{k!} + \frac{d^{n+1} f(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y)}{(n+1)!}.$$

Công thức này gọi là công thức khai triển Taylor cấp n. Số hạng cuối cùng gọi là số dư của khai triển.

Khi $(x_0,y_0)=(0,0)$, khai triển Taylor trở thành khai triển Maclaurin:

$$f(\Delta x, \Delta y) = f(0,0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{d^k f(0,0)}{k!} + \frac{d^{n+1} f(\theta\Delta x, \theta\Delta y)}{(n+1)!}.$$

Ví dụ 2.9

a) *Tìm khai triển Taylor hàm số $f(x,y) = x^2+2y^2-3xy+6x+6y-7$ ở lân cận điểm $(-1,2)$.*

b) *Tìm khai triển Maclaurin $f(x,y) = e^x \sin y$ đến bậc 3.*

a) Ta có

$$\begin{cases} f'_x(x,y) = 2x - 3y + 6 \Rightarrow f'_x(-1,2) = -2 \\ f'_y(x,y) = 4y - 3x + 6 \Rightarrow f'_y(-1,2) = 17. \end{cases}$$

Do đó,

$$df(-1,2) = f'_x(-1,2)(x+1) + f'_y(-1,2)(y-2) = -2(x+1) + 17(y-2).$$

Ta cũng có, $f''_{xx}(x,y) = 2,\ f''_{yy}(x,y) = 4,\ f''_{xy}(x,y) = -3$. Do đó,

$$d^2f(-1,2) = 2(x+1)^2 - 6(x+1)(y-2) + 4(y-2)^2$$

và $d^n f(-1,2) = 0,\ \forall n \geq 3$. Như vậy, khai triển Taylor của $f(x,y)$ trong lân cận của điểm $M(-1,2)$ là

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(-1,2) + df(-1,2) + \frac{d^2f(-1,2)}{2} \\ &= 14 - 2(x+1) + 17(y-2) + (x+1)^2 - 3(x+1)(y-2) + 2(y-2)^2. \end{aligned}$$

b) Ta có khai triển Maclaurin các hàm $g(x) = e^x$ và $h(y) = \sin y$ đến bậc 3 là

$$g(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3), \ h(y) = y - \frac{y^3}{6} + o(y^4).$$

Do đó, khai triển Maclaurin hàm $f(x, y)$ đến bậc 3 là

$$f(x, y) = y + xy + \frac{x^2 y}{2} - \frac{y^3}{6} + o\left((x^2 + y^2)^{3/2}\right).$$

Trong công thức trên, $o(x^2 + y^2)^{3/2}$ là một vô cùng bé bậc cao hơn $(x^2 + y^2)^{3/2}$, nghĩa là

$$\lim_{\Delta x \to 0, \Delta y \to 0} \frac{o(x^2 + y^2)^{3/2}}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = 0.$$

Hàm ẩn - Đạo hàm của hàm số ẩn

Cho phương trình

$$F(x, y) = 0, \tag{1}$$

trong đó $F : U \to \mathbb{R}$ là một hàm số xác định trên tập mở $U \subset \mathbb{R}^2$ và $(x_0, y_0) \in U,\ F(x_0, y_0) = 0$. Giả sử rằng với mọi $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, ($\delta > 0$ đủ nhỏ) tồn tại $y(x)$ sao cho $(x, y(x)) \in U$ và $F(x, y(x)) = 0$. Lúc đó, hàm $y = y(x)$ gọi là hàm ẩn của x xác định bởi phương trình 1.

Định lý 2.4

Cho phương trình $F(x, y) = 0$ trong đó $F : U \to \mathbb{R}$ là một hàm số có các đạo hàm riêng liên tục trên tập mở $U \subset \mathbb{R}^2,\ (x_0, y_0) \in U,\ F(x_0, y_0) = 0$ và $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$. Khi đó, phương trình $F(x, y) = 0$ xác định một hàm số ẩn duy nhất $y = y(x)$ trong một lân cận nào đó của x_0 và có đạo hàm

$$y'(x_0) = -\frac{F'_x(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)}.$$

Ví dụ 2.10

Phương trình $x^3 - y^3 + 3xy - 13 = 0$ xác định hàm ẩn $y = y(x)$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm ẩn này tại điểm $A(-1, -2)$.

Xét hàm số $F(x,y) = x^3 - y^3 + 3xy - 13$ có $\begin{cases} F'_x = 3x^2 + 3y \\ F'_y = -3y^2 + 3x. \end{cases}$ Khi đó, ta có

$$y'(-1) = -\frac{F'_x(-1,-2)}{F'_y(-1,-2)} = -\frac{3}{15} = -\frac{1}{5}.$$

Do đó, phương trình tiếp tuyến của hàm ẩn tại A là $y = -\dfrac{x+11}{5}$.

Hàm ẩn - Đạo hàm của hàm số ẩn

Định lý 2.5

Cho phương trình $F(x,y,z)=0$ *trong đó* $F:V\to\mathbb{R}$ *là một hàm số có các đạo hàm riêng liên tục trên tập mở* $V\subset\mathbb{R}^3$, $(x_0,y_0,z_0)\in V$, $F(x_0,y_0,z_0)=0$ *và* $F'_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$. *Khi đó, phương trình* $F(x,y,z)=0$ *xác định một hàm số ẩn duy nhất* $z=z(x,y)$ *trong một lân cận nào đó của* (x_0,y_0) *và có đạo hàm*

$$z'_x(x_0,y_0)=-\frac{F'_x(x_0,y_0,z_0)}{F'_z(x_0,y_0,z_0)},\quad z'_y(x_0,y_0)=-\frac{F'_y(x_0,y_0,z_0)}{F'_z(x_0,y_0,z_0)}.$$

Ví dụ 2.11

Cho hàm ẩn $z=z(x,y)$ *xác định bởi phương trình* $x^3+2xy^2+2yz+z^3=2$. *Tính* $z'_x(1,0)$, $z'_y(1,0)$.

Giải.
Đặt $F(x,y,z)=x^3+2xy^2+2yz+z^3-2$. Lúc đó, $F(x,y,z)=0$ xác định hàm ẩn $z=z(x,y)$. Từ $x=1,y=0$, ta suy ra $z=1$. Ta có

$$F'_x=3x^2+2y^2,\ F'_y=4xy+2z,\ F'_z=2y+3z^2.$$

Do đó, $z'_x(1,0)=-\dfrac{F'_x(1,0,1)}{F'_z(1,0,1)}=-1,\ z'_y(1,0)=-\dfrac{F'_y(1,0,1)}{F'_z(1,0,1)}=-\dfrac{2}{3}.$

Ví dụ 2.12

Phương trình $z^2 + \frac{2}{x} = \sqrt{y^2 - z^2}$ *xác định hàm ẩn* $z = z\left(x, y\right)$. *Tính* $A = x^2 z'_x + \frac{1}{y} z'_y - \frac{1}{z}$.

Xét hàm số $F\left(x, y, z\right) = z^2 + \frac{2}{x} - \sqrt{y^2 - z^2}$. Lúc đó, $F(x, y, z) = 0$ xác định hàm ẩn $z = z(x, y)$. Ta có

$$\begin{cases} F'_x = -\dfrac{2}{x^2} \\ F'_y = \dfrac{-y}{\sqrt{y^2 - z^2}} \\ F'_z = 2z + \dfrac{z}{\sqrt{y^2 - z^2}}. \end{cases} \quad \text{Do đó, } \begin{cases} z'_x = \dfrac{\frac{2}{x^2}}{2z + \frac{z}{\sqrt{y^2 - z^2}}} \\ z'_y = \dfrac{\frac{y}{\sqrt{y^2 - z^2}}}{2z + \frac{z}{\sqrt{y^2 - z^2}}}. \end{cases}$$

Từ đó, ta suy ra $A = x^2 z'_x + \frac{z'_y}{y} - \frac{1}{z} = 0$.

Nội dung

Cực trị của hàm số nhiều biến số

Định nghĩa 4

Cho hàm số $z = f(x, y)$ *xác định trong một lân cận* $B(M_0, \varepsilon)$ *của* $M(x_0, y_0)$*. Điểm* M *được gọi là:*

a) điểm cực tiểu của f nếu $f(x, y) - f(x_0, y_0) > 0, \quad \forall (x, y) \in B(M_0, \varepsilon) \setminus \{M_0\}$.

b) điểm cực đại của f nếu $f(x, y) - f(x_0, y_0) < 0, \quad \forall (x, y) \in B(M_0, \varepsilon) \setminus \{M_0\}$.

Định lý 3.1 (Điều kiện cần)

Nếu hàm số $f(x, y)$ *đạt cực trị tại* $M_0(x_0, y_0)$ *và* $\exists f'_x(x_0, y_0), \exists f'_y(x_0, y_0)$ *thì*

$$\begin{cases} f'_x(x_0, y_0) = 0, \\ f'_y(x_0, y_0) = 0, \ \textit{(điểm dừng)}. \end{cases}$$

Cực trị của hàm số nhiều biến số

Đặt $A = f_{xx}"(M_0)$, $\quad B = f_{xy}"(M_0)$, $\quad C = f_{yy}"(M_0)$.

Định lý 3.2

Giả sử hàm số $z = f(x, y)$ có các đạo hàm riêng đến cấp hai liên tục trong một lân cận nào đó của điểm dừng $M_0(x_0, y_0)$. Khi đó, ta có

a) Nếu $\Delta = B^2 - AC < 0$ thì $f(x, y)$ đạt cực trị tại M_0. Đó là cực tiểu nếu $A > 0$, là cực đại nếu $A < 0$.

b) Nếu $\Delta = B^2 - AC > 0$ thì $f(x, y)$ không đạt cực trị tại M_0.

Chú ý: Khi $\Delta = B^2 - AC = 0$ ta chưa kết luận được điều gì, điểm M_0 có thể là cực trị, cũng có thể không. Trong trường hợp đó ta sẽ dùng định nghĩa để xét xem M_0 có phải là cực trị hay không:

Cực trị của hàm số nhiều biến số

Ví dụ 3.1

Tìm cực trị của hàm số $z = x^2 + xy + y^2 + x - y + 1.$

Xét hệ phương trình $\begin{cases} z'_x = 2x + y + 1 = 0 \\ z'_y = x + 2y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 1. \end{cases}$

Vậy $M(-1, 1)$ là điểm dừng duy nhất.

Ta có

$$A = z''_{xx}(M) = 2, \quad B = z''_{xy}(M) = 1, \quad C = z''_{yy}(M) = 2,$$

nên $B^2 - AC = 1 - 4 = -3 < 0.$

Kết luận: hàm số đạt cực trị tại M và do $A > 0$ nên M là điểm cực tiểu, $z(-1; 1) = 0.$

Ví dụ 3.2

Tìm cực trị của các hàm số sau

a) $z = x^3 + 2xy - 7x - 6y + y^2 + 4.$ *b)* $z = 2x^2 + 3y^2 - e^{-(x^2+y^2)}.$

a) Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 2y - 7 = 0 \\ 2x + 2y - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = -\dfrac{1}{3} \\ y = \dfrac{10}{3}. \end{cases}$$

Vậy hàm số có hai điểm tới hạn $M_1\,(1,2)$ và $M_2\Big(-\dfrac{1}{3}, \dfrac{10}{3}\Big)$.
Ta có $z''_{xx} = 6x,\ z''_{xy} = 2,\ z''_{yy} = 2.$
Tại M_1: $B^2 - AC = -8 < 0$ và $A = 6 > 0$, hàm số đã cho đạt cực tiểu và $z(M_1) = -6$.
Tại M_2: $B^2 - AC = 8 > 0$, hàm số đã cho không đạt cực trị.

b) Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x[2 + e^{-(x^2+y^2)}] = 0 \\ 2y[3 + e^{-(x^2+y^2)}] = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0. \end{cases}$$

Vậy $O\,(0,0)$ là điểm tới hạn duy nhất.
Ta có $z(x,y) \geq z(0,0),\ \forall (x,y)$ nên $O(0,0)$ là điểm cực tiểu và $z(0,0) = -1$.

Ví dụ 3.3

Tìm cực trị của hàm số $z(x, y) = 3x^2y - x^3 - y^4 - 27$.

Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6xy - 3x^2 = 0 \\ 3x^2 - 4y^3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 3 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = 0 \\ y = 0. \end{cases}$$

Vậy hàm số có hai điểm tới hạn $M_1\,(6, 3)$ và $M_2(0, 0)$.
Ta có $z''_{xx} = 6y - 6x,\ z''_{xy} = 6x,\ z''_{yy} = -12y^2$.
Tại M_1: $A = -18 < 0, B = 36, C = -108,\ B^2 - AC < 0$, hàm số đã cho đạt cực đại và $z(M_1) = 0$.
Tại M_2: $B^2 - AC = 0$, nên chưa thể kết luận được. Xét biểu thức số gia hàm số:

$$\Delta z(x, y) = z(x, y) - z(0, 0) = 3x^2y - x^3 - y^4.$$

Ta xây dựng hai dãy điểm tiến tới M_2: $(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, 0\right)$ và $(\bar{x}_n, \bar{y}_n) = \left(-\frac{1}{n}, 0\right)$, $(n \geq 1)$. Dễ thấy $\Delta z(x_n, y_n) = \frac{1}{n^3} > 0$, nhưng $\Delta z(\bar{x}_n, \bar{y}_n) = -\frac{1}{n^3} < 0$ với mọi $n > 1$. Vậy M_2 không là điểm cực trị của hàm số.

Cực trị có điều kiện

Bài toán

Tìm cực trị của hàm số $f(x, y)$ khi các biến x, y thoả mãn phương trình

$$\varphi(x, y) = 0. \tag{2}$$

Tìm được hàm số $y = f(x)$ từ điều kiện $\varphi(x, y) = 0$

Bài toán tìm cực trị ràng buộc được đưa về bài toán tìm cực trị tự do của hàm số một biến số.

Ví dụ 3.4

Tìm cực trị của $z = x.y$ với điều kiện $x + y = 1$

Từ điều kiện $x + y = 1$ ta suy ra $y = 1 - x$. Vậy $z = xy = x(1 - x)$. Dễ dàng nhận thấy hàm số $x = x(1 - x)$ đạt cực đại tại $x = \dfrac{1}{2}$ và $z_{\text{CĐ}} = \dfrac{1}{4}$.

Cực trị có điều kiện

Định lý 3.3 (Điều kiện cần để hàm số đạt cực trị điều kiện)

Giả sử $M(x_0, y_0)$ *là điểm cực trị của hàm* f *với điều kiện* $\varphi(x, y) = 0$ *và*

a) $f(x, y), \varphi(x, y)$ *có các ĐHR liên tục trong một lân cận của* M_0*.*

b) $\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0.$

Khi đó,

$$\begin{vmatrix} f'_x(M) & f'_y(M) \\ \varphi'_x(M) & \varphi'_y(M) \end{vmatrix} = 0.$$

$$\begin{cases} f'_x(M) + \lambda \varphi'_x(M) & = 0 \\ f'_y(M) + \lambda \varphi'_y(M) & = 0 \\ \varphi(x, y) & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \phi'_x = 0 \\ \phi'_y = 0 \\ \phi'_\lambda = 0, \end{cases} \tag{3}$$

ở đó $\phi(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y)$.

Phương pháp Lagrange

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial \lambda} = 0 \end{cases} \quad \text{với } \phi(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y)$$

Giả sử $M(x_0, y_0)$ là một điểm tới hạn ứng với giá trị λ_0. Ta có

$$\phi(x, y, \lambda_0) - \phi(x_0, y_0, \lambda_0) = f(x, y) - f(x_0, y_0).$$

Bổ đề

Nếu M là một điểm cực trị của hàm số $\phi(x, y, \lambda_0)$ thì M cũng là điểm cực trị của hàm số $f(x, y)$ với điều kiện $\varphi(x, y) = 0$.

Ví dụ 3.5

Tìm cực trị của hàm số $z = x^2 + 2y^2$ *với điều kiện* $x^2 + y^2 = 1$.

Xét hàm số Lagrange $L(x, y, \lambda) = x^2 + 2y^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$. Từ hệ phương trình

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2\lambda x = 0 \\ 4y + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

ta thu được các điểm tới hạn là $M_1(1, 0),\ M_2(-1, 0)$ ứng với $\lambda_{1,2} = \pm 1$ và $M_3(0, 1), M_4(0, -1)$ ứng với $\lambda_{3,4} = \pm 2$. Lúc đó, ta có

$$d^2 L = \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} dy^2 = (2 + 2\lambda)\, dx^2 + (4 + 2\lambda)\, dy^2.$$

Tại $M_i, i = 1, 2$, $d^2 L(M_i) > 0$ nên M_i là điểm cực tiểu có điều kiện và $f(M_i) = 1$.

Tại $M_j, j = 3, 4$, $d^2 L(M_j) < 0$ nên M_j là điểm cực đại có điều kiện và $f(M_j) = 2$.

Giá trị lớn nhất - Giá trị nhỏ nhất

Ta biết rằng nếu $f : A \to \mathbb{R}$ là hàm số liên tục trên tập hợp đóng, bị chặn A của $\mathbb{R}^2$, thì f đạt giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên A. Để tìm các giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của f ta tìm giá trị của hàm số tại tất cả các điểm tới hạn (điểm dừng và các điểm làm cho đạo hàm riêng không tồn tại) trong miền A, sau đó so sánh các giá trị này với các giá trị của hàm trên biên ∂A của A (tức là ta phải xét cực trị có điều kiện).

Ví dụ 3.6

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $z = x^2 + y^2 + xy - 7x - 8y$ *trong hình tam giác* OAB*, ở đó* $O(0,0), A(6,0), B(0,6)$.

+) Tìm các điểm dừng ở miền trong của tam giác: Ta có

$$\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y - 7 = 0 \\ x + 2y - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow M_1(2,3).$$

+) Tìm cực trị trên biên (cực trị có điều kiện):

$(x,y) \in OA \Rightarrow z = f(x) = x^2 - 7x, x \in (0,6)$. Có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{7}{2} \Rightarrow M_2\left(\dfrac{7}{2}, 0\right)$.

$(x,y) \in OB \Rightarrow z = g(y) = y^2 - 8y, y \in (0,6)$. Có $g'(y) = 0 \Leftrightarrow y = 4 \Rightarrow M_3\Big(0,4\Big)$.

$(x,y) \in AB \Rightarrow z = h(x) = x^2 - 5x - 12, x \in (0,6)$. Có $h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{5}{2} \Rightarrow M_4\left(\dfrac{5}{2}, \dfrac{7}{2}\right)$.

Do đó,
$\text{Max } z = \text{Max}\{z(O), z(A), z(B), z(M_1), z(M_2), z(M_3), z(M_4)\} = 0$ tại $O(0,0)$,
$\text{Min } z = \text{Min}\{z(O), z(A), z(B), z(M_1), z(M_2), z(M_3), z(M_4)\} = -19$ tại $M_1(2,3)$.