# Chương 1
# PHÉP TÍNH VI PHÂN HÀM MỘT BIẾN SỐ

VIỆN TOÁN ỨNG DỤNG VÀ TIN HỌC
ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI

Ngày 1 tháng 8 năm 2023

# Nội dung

# Khái niệm hàm số

**Định nghĩa 1**

*Cho $X$ và $Y$ là các tập hợp con của $\mathbb{R}$. Một hàm số $f$ đi từ tập hợp $X$ vào tập hợp $Y$, kí hiệu $f : X \to Y$, là một quy tắc cho tương ứng mỗi giá trị $x \in X$ với một giá trị duy nhất $y \in Y$.*

Chú ý rằng điều ngược lại không đúng, với một giá trị $y \in Y$ có thể có hai giá trị $x_1 \neq x_2, (x_1, x_2 \in X)$ sao cho $f(x_1) = f(x_2) = y$. Chẳng hạn như $f(x) = x^2$.

**Tập xác định - Tập giá trị**

a) TXĐ $= \{x \in X | f(x)$ được định nghĩa$\}$.

b) TGT $= \{y \in Y | \exists x \in X, f(x) = y\}$.

# Hàm số

## Hàm số chẵn, hàm số lẻ

a) Hàm số chẵn: $\begin{cases} \forall x \in \text{ TXĐ}, -x \in \text{ TXĐ}, \\ f(-x) = f(x) \end{cases}$

b) Hàm số lẻ: $\begin{cases} \forall x \in \text{ TXĐ}, -x \in \text{ TXĐ}, \\ f(-x) = -f(x) \end{cases}$

## Hàm số tuần hoàn

$\exists T > 0 : f(x) = f(x+T), \ \forall x \in$ TXĐ.

## Hàm hợp

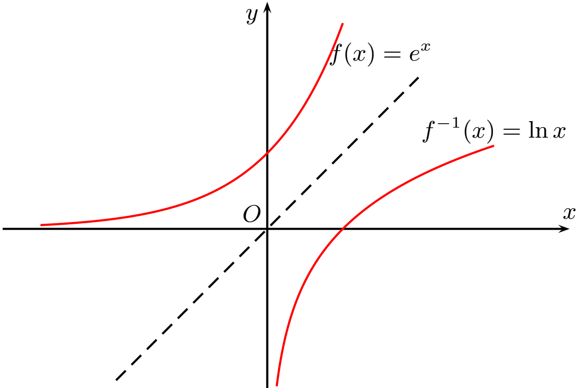
Cho $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$. Khi đó $(g \circ f)(x) = g[f(x)]$.

# Hàm số

## Hàm ngược

Cho $f : X \to Y$ là một song ánh. Khi đó

$$f^{-1} : Y \to X,$$
$$y \mapsto x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow y = f(x)$$



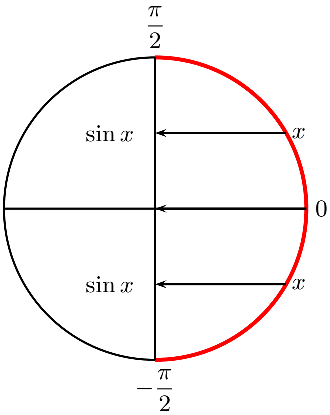
# Các hàm số sơ cấp cơ bản

1. Hàm lũy thừa $y = x^\alpha$. Định nghĩa và TXĐ của hàm số này phụ thuộc vào $\alpha$.
   a) Nếu $0 \le \alpha = \dfrac{p}{q}$, (phân số tối giản) thì định nghĩa $x^\alpha = \sqrt[q]{x^p}$.
   b) Nếu $\alpha = -\dfrac{p}{q} < 0$, (phân số tối giản) thì định nghĩa $x^\alpha = \dfrac{1}{\sqrt[q]{x^p}}$.
   c) Nếu $\alpha \notin \mathbb{Q}$ thì hàm số $y = x^\alpha$ được định nghĩa như lớp 12, nó xác định với $x > 0$. Trong trường hợp $\alpha > 0$ ta bổ sung điểm $x = 0$ vào tập xác định của hàm số với $y(0) = 0$.
2. Hàm số mũ $y = a^x$ $(0 < a \neq 1)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và luôn dương. Hàm này đồng biến nếu $a > 1$ và nghịch biến nếu $a < 1$.
3. Làm số logarit $y = \log_a(x)$ $(0 < a \neq 1)$ xác định trên $\mathbb{R}^+$. Hàm số này đồng biến nếu $a > 1$ và nghịch biến nếu $a < 1$.

# Các hàm số sơ cấp cơ bản

4. Hàm lượng giác

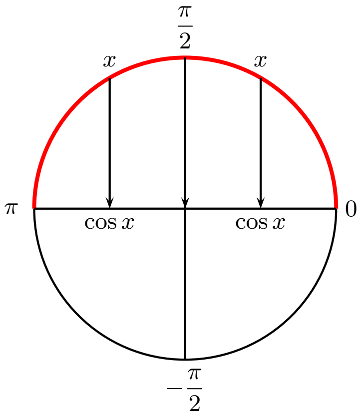
   a) Hàm số $y = \sin x$, TXĐ $= \mathbb{R}$, là hàm số lẻ, tuần hoàn CK $2\pi$.



# Các hàm số sơ cấp cơ bản

4. Hàm lượng giác

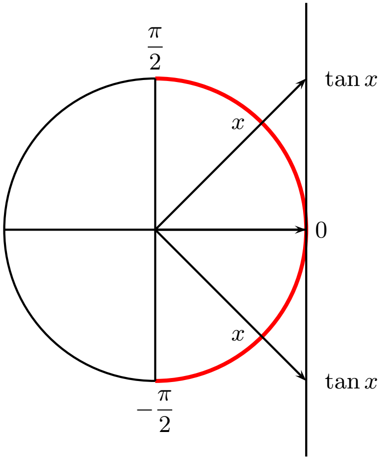
   b) Hàm số $y = \cos x$, TXĐ $= \mathbb{R}$, là hàm số chẵn, tuần hoàn CK $2\pi$.



# Các hàm số sơ cấp cơ bản

4. Hàm lượng giác

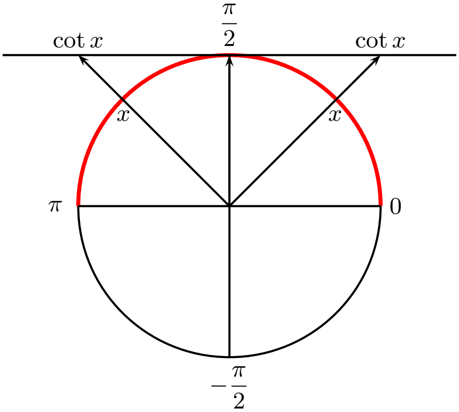
c) Hàm số $y = \tan x$, TXĐ $= \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\dfrac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$, là hàm số lẻ, tuần hoàn chu kì $\pi$.



# Các hàm số sơ cấp cơ bản

4. Hàm lượng giác

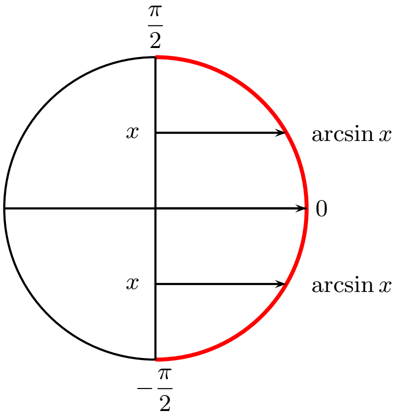
   d) Hàm số $y = \cot x$, TXĐ $= \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, là hàm số lẻ, tuần hoàn chu kì $\pi$.



# Các hàm số sơ cấp cơ bản

5. Hàm lượng giác ngược.

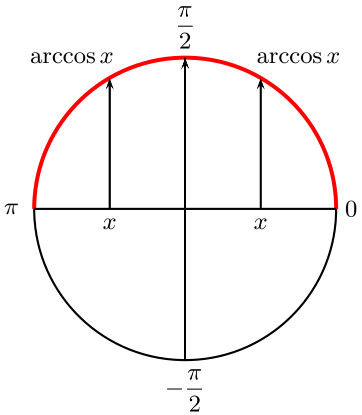
   a) Hàm số $y = \arcsin x$, TXĐ$= [-1, 1]$, TGT$= \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ và là một hàm số đơn điệu tăng.



# Các hàm số sơ cấp cơ bản

5. Hàm lượng giác ngược.

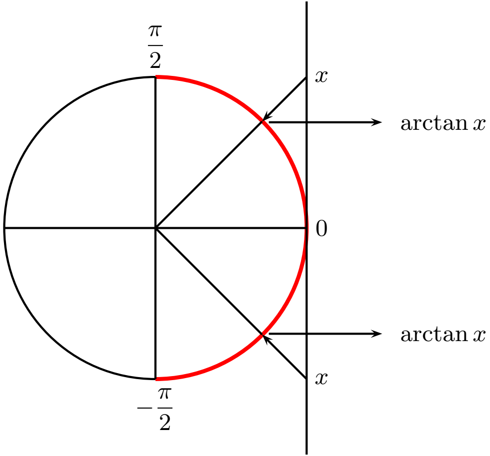
   b) Hàm số $y = \arccos x$, TXĐ$= [-1, 1]$, TGT$= [0, \pi]$ và là một hàm số đơn điệu giảm.



# Các hàm số sơ cấp cơ bản

5. Hàm lượng giác ngược.

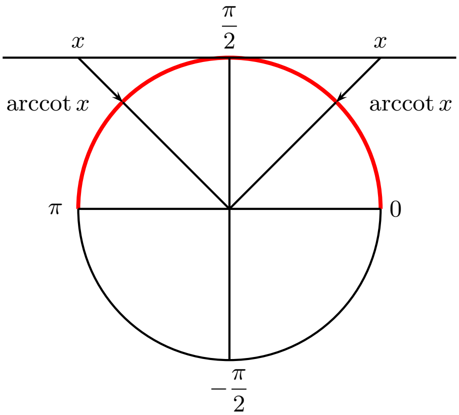
   c) Hàm số $y = \arctan x$, TXĐ$=\mathbb{R}$, TGT$= \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ và là một hàm số đơn điệu tăng.



# Các hàm số sơ cấp cơ bản

5. Hàm lượng giác ngược.

   d) Hàm số $y = \operatorname{arccot} x$ xác định trên $\mathbb{R}$, nhận giá trị trên $(0, \pi)$ và là một hàm số đơn điệu giảm.



# Hàm số sơ cấp

Người ta gọi hàm số sơ cấp là hàm số được tạo thành bởi một số hữu hạn các phép toán cộng, trừ, nhân, chia, lấy hàm hợp đối với các hàm số sơ cấp cơ bản. Các hàm số sơ cấp được chia thành hai loại.

a) Hàm số đại số: là những hàm số mà khi tính giá trị của nó ta chỉ phải làm một số hữu hạn các phép toán cộng, trừ, nhân, chia và lũy thừa với số mũ hữu tỉ. Ví dụ: các đa thức, phân thức, ...

b) Hàm số siêu việt: là những hàm số sơ cấp nhưng không phải là hàm số đại số, như $y = \ln x, y = \sin x, \ldots$

# Dãy số

## Định nghĩa 2

*Một dãy số là một hàm số* $\mathbb{N} \to \mathbb{R}, n \mapsto a_n$.
*Kí hiệu* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

a) *Dãy số đơn điệu: tăng* ($a_n \leq a_{n+1}$), *giảm* ($a_n \geq a_{n+1}$), $\forall n$.

b) *Dãy số bị chặn: chặn trên* $a_n \leq M\ \forall n$, *chặn dưới:* $a_n \geq K, \forall n$.

## Giới hạn của dãy số

Một dãy số $\{a_n\}$ được gọi là có giới hạn là $L$ và viết $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ nếu

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, (n \geq N \Rightarrow |a_n - L| < \epsilon).$$

### Dãy số hội tụ - phân kì

a) Ta nói dãy số $\{a_n\}$ là hội tụ nếu có số $L \in \mathbb{R}$ sao cho $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$.

b) Ngược lại, ta nói dãy số $\{a_n\}$ là phân kì.

### Giới hạn vô cùng

Ta nói $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ nếu

$$\forall M > 0, \exists N \in \mathbb{N}, (n \geq N \Rightarrow a_n > M).$$

Hãy phát biểu cho TH $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$

### Tính duy nhất của giới hạn

Giới hạn của một dãy số, nếu tồn tại, là duy nhất.

# Các tiêu chuẩn tồn tại giới hạn:

**Tiêu chuẩn của dãy số đơn điệu**

Một dãy số tăng và bị chặn trên (hoặc giảm và bị chặn dưới) thì hội tụ.

**Tiêu chuẩn kẹp**

Cho các dãy số thực $(a_n), (b_n), (c_n)$ thỏa mãn

a) $\exists N \in \mathbb{N} : a_n \leq b_n \leq c_n, \forall n \geq N$,

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} c_n = L$.

Khi đó, $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = L$.

# Tiêu chuẩn Cauchy

**Định nghĩa 3**

*Dãy số* $\{a_n\}$ *được gọi là dãy số Cauchy nếu với mọi* $\epsilon > 0$*, tồn tại số tự nhiên* $N$ *sao cho* $|a_n - a_m| < \epsilon$ *với mọi* $m, n > N$*.*

**Ví dụ 1.1**

*Dãy số* $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ *là một dãy số Cauchy.*

**Định lý 1.1**

*Dãy số* $\{a_n\}$ *là hội tụ khi và chỉ khi nó là dãy số Cauchy.*

**Ví dụ 1.2**

*Chứng minh rằng dãy số* $\{a_n\}$ *với* $a_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n}$ *là phân kỳ.*

# Giới hạn của dãy số

## Các phép toán về giới hạn của dãy số

Nếu tồn tại $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = A$, $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = B$ hữu hạn thì

a) $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n + \lim\limits_{n\to+\infty} b_n$,

b) $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n - b_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n - \lim\limits_{n\to+\infty} b_n$,

c) $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n b_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n . \lim\limits_{n\to+\infty} b_n$,

d) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to+\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to+\infty} b_n}$, nếu $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n \neq 0$.

Bốn dạng vô định: $\infty - \infty$, $\dfrac{0}{0}$, $\dfrac{\infty}{\infty}$, $0 \times \infty$.

# Nội dung

# Giới hạn của hàm số

Hai định nghĩa tương đương:

**Định nghĩa 4**

*Giả sử rằng hàm số $f(x)$ được xác định tại mọi điểm $x \in (a,b) \setminus \{x_0\}$. Ta nói giới hạn của hàm số $f(x)$ khi $x$ tiến đến $x_0$ bằng $L$ và viết*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

*nếu với mọi $\epsilon > 0$, tồn tại số $\delta > 0$ sao cho với $0 < |x - x_0| < \delta$ thì $|f(x) - L| < \epsilon$.*
*Tương tự như vậy, hãy nêu các định nghĩa $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$, $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x)$.*

**Định nghĩa 5**

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \{x_n\}, x_n \neq x_0,$ $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = x_0$ *thì* $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = L.$

# Các tính chất của giới hạn

## Tính duy nhất của giới hạn

Giới hạn $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, nếu tồn tại, là duy nhất.

## Các phép toán trên giới hạn

Nếu tồn tại các giới hạn $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$ hữu hạn thì

a) $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) + \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$.

b) $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) - g(x)] = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) - \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$.

c) $\lim\limits_{x \to x_0} [cf(x)] = c \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

d) $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$.

e) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}$ nếu $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) \neq 0$.

### Định lý 2.1 (Tiêu chuẩn kẹp)

*Nếu* $f(x) \le g(x) \le h(x)$ *trong một lân cận nào đó của* $x_0$, *và tồn tại các giới hạn* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} h(x) = L$. *Khi đó* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = L$.

### Ví dụ 2.1

*Chứng minh* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1.$

### Giới hạn của hàm hợp

Nếu có $\begin{cases} \lim\limits_{x\to x_0} u(x) = u_0, \\ \lim\limits_{u\to u_0} f(u) = f(u_0) \end{cases}$ thì $\lim\limits_{x\to x_0} f(u(x)) = f(u_0)$.

Áp dụng $\lim\limits_{x\to x_0} A(x)^{B(x)} = e^{\lim\limits_{x\to x_0} B(x)\ln A(x)}$.

# Nội dung

# Vô cùng lớn - Vô cùng bé

## Vô cùng bé

Hàm số $f(x)$ được gọi là một vô cùng bé (viết tắt là VCB) khi $x \to a$ nếu $\lim_{x\to a} f(x) = 0$.
Từ định nghĩa giới hạn của hàm số, nếu $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ thì $f(x) = A + \alpha(x)$, trong đó $\alpha(x)$ là một VCB khi $x \to a$.

## Ví dụ 3.1

$f(x) = \sin x, g(x) = \tan x, h(x) = x^{2017}$ *là các VCB khi* $x \to 0$.

## Các tính chất

a) Tổng, hiệu, tích của hai VCB là một VCB.

b) Tuy nhiên, thương của hai VCB chưa chắc đã là một VCB, vì chúng thuộc dạng vô định $\dfrac{0}{0}$.

# So sánh các VCB

## So sánh các VCB

Giả sử $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ là các VCB khi $x \to a$.

a) Nếu $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, ta nói rằng $\alpha(x)$ là VCB bậc cao hơn $\beta(x)$ và kí hiệu $\alpha(x) = o(\beta(x))$.

b) Nếu $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A \neq 0$, ta nói rằng $\alpha(x), \beta(x)$ là các VCB cùng bậc. Đặc biệt, nếu $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$ thì ta nói $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ là các VCB tương đương và viết $\alpha(x) \sim \beta(x)$.

## Ví dụ 3.2

*a)* $f(x) = x^a$ $(a > 0)$ *là VCB bậc cao hơn* $g(x) = x^b$ $(b > 0) \Leftrightarrow a > b$.

*b)* $\sin x \sim x$.

# Quy tắc thay tương đương

## Quy tắc thay tương đương

Nếu ta có các VCB tương đương $\alpha_1(x) \sim \alpha_2(x), \beta_1(x) \sim \beta_2(x)$ khi $x \to a$ thì

$$\lim_{x\to a} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)} = \lim_{x\to a} \frac{\alpha_2(x)}{\beta_2(x)}.$$

## Các VCB tương đương hay dùng khi $x \to 0$

$$x \sim \sin x \sim \tan x \sim \arcsin x \sim \arctan x \sim e^x - 1 \sim \frac{a^x - 1}{\ln a} \sim \ln(1+x),\ \ (1+x)^a - 1 \sim ax.$$

## Ví dụ 3.3

*a)* $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{x^2} - 1}{x^2 + x^3}$.

*b)* $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\sqrt{x}} - 1}{\sqrt{x + x^2}}$.

*c)* $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[m]{1+\alpha x} - \sqrt[n]{1+\beta x}}{x}$

*d)* $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}.\sqrt[n]{1+\beta x} - 1}{x}$.

# Quy tắc ngắt bỏ VCB bậc cao

## Quy tắc ngắt bỏ VCB bậc cao

Cho $\alpha(x), f(x), \beta(x), g(x)$ là các VCB khi $x \to a$. Nếu $\alpha(x) = o(f(x)), \beta(x) = o(g(x))$ thì

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)+\alpha(x)}{g(x)+\beta(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

## Ví dụ 3.4

*a)* $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x + \arcsin^2 x - \arctan^2 x}{3x}$.

*b)* $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x + 2\sin x - \sin^3 x - x^2 + 3x^4}{\tan^3 x - 6\sin^2 x + x - 5x^3}$.

# Vô cùng bé

## Ví dụ 3.5 (Giữa kì, K61)

*So sánh cặp vô cùng bé sau đây khi* $x \to 0$

*a)* $\alpha(x) = \sqrt[3]{x^2 + x^3}, \quad \beta(x) = e^{\sin x} - 1.$

*b)* $\alpha(x) = \sqrt[5]{x^4 - x^5}, \quad \beta(x) = \ln(1 + \tan x).$

*c)* $\alpha(x) = e^{\sqrt{x}} - 1, \quad \beta(x) = \sqrt{x + x^2}.$

*d)* $\alpha(x) = e^{x^2} - 1, \quad \beta(x) = x^2 + x^3.$

*e)* $\alpha(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}}, \quad \beta(x) = e^{\sin x} - \cos x.$

## Chú ý 3.1

*KHÔNG thay tương đương với hiệu hai VCB,* $\alpha(x) = \sin x - \tan x + x^3$.

*a) Thay tương đương* $\alpha(x) \sim x^3, (SAI),$

*b) Thực tế,* $\alpha(x) \sim \dfrac{x^3}{2}$ *(ĐÚNG).*

# Vô cùng lớn

## Vô cùng lớn

a) Hàm số $f(x)$ được gọi là một vô cùng lớn (viết tắt là VCL) khi $x \to a$ nếu $\lim_{x\to a} |f(x)| = +\infty$.

b) $f(x)$ là một VCL khi $x \to a \Leftrightarrow \dfrac{1}{f(x)}$ là một VCB khi $x \to a$.

## So sánh các VCL

Giả sử $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ là các VCL khi $x \to a$.

a) Nếu $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty$, ta nói rằng $\alpha(x)$ là VCB bậc cao hơn $\beta(x)$.

b) Nếu $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A \neq 0$, ta nói rằng $\alpha(x), \beta(x)$ là các VCL cùng bậc. Đặc biệt, nếu $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$ thì ta nói $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ là các VCL tương đương và viết $\alpha(x) \sim \beta(x)$.

# Vô cùng lớn

**Quy tắc thay tương đương và ngắt bỏ VCL bậc thấp**

a) Nếu $\alpha_1(x) \sim \alpha_2(x), \beta_1(x) \sim \beta_2(x)$ là các VCL khi $x \to a$ thì $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{\alpha_2(x)}{\beta_2(x)}$.

b) Cho $\alpha(x), f(x), \beta(x), g(x)$ là các VCL khi $x \to a$. Nếu $\alpha(x)$ là VCL bậc thấp hơn $f(x)$, $\beta(x)$ là VCL bậc thấp hơn $g(x)$ thì

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)+\alpha(x)}{g(x)+\beta(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

**Ví dụ 3.6**

*Tính*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}; \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x+2^x}{x+3^x}.$$

# Nội dung

# Hàm số liên tục

### Định nghĩa 6

*Hàm số* $f(x)$ *được gọi là liên tục tại* $x_0$ *nếu nó xác định trong một lân cận nào đó của* $x_0$ *và* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

### Liên tục một phía

a) Liên tục trái: $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

b) Liên tục phải $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$.

### Ví dụ 4.1 (Học kì 20163)

*Tìm* $a$ *để* $x = 2$ *là điểm liên tục của hàm số*

$$f(x) = \begin{cases} a\cos\sqrt{x-1}, & \text{nếu } x \geq 1, \\ \operatorname{arccot}(1-x), & \text{nếu } x < 1. \end{cases}$$

# Các định lý về hàm liên tục

## Hàm số liên tục trên một khoảng, một đoạn

i) Hàm số $f(x)$ liên tục trên $(a, b)$ nếu nó liên tục tại mọi $x_0 \in (a, b)$,

ii) Hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a, b]$ nếu nó liên tục tại mọi $x_0 \in (a, b)$, đồng thời liên tục phải tại $a$, liên tục trái tại $b$. Khi đó, nó

   a) bị chặn trên đoạn đó, tức là $m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in [a, b]$.

   b) đạt được GTLN, GTNN trên đó.

## Liên tục từng khúc

Ta nói hàm số $f(x)$ liên tục từng khúc trên $[a, b]$ nếu

a) $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$,

b) $f(x)$ liên tục trên mỗi khoảng $(a_i, a_{i+1})$,

c) tồn tại $\lim\limits_{x \to a_i^+} f(x)$ và $\lim\limits_{x \to a_{i+1}^-} f(x)$ hữu hạn.

# Các định lý về hàm liên tục

### Một số tính chất

Tổng, hiệu, tích, thương của các hàm số liên tục?

### Sự liên tục của hàm hợp

Nếu $\begin{cases} u(x) \text{ liên tục tại } x_0, \\ f(u) \text{ liên tục tại } u_0 = u(x_0) \end{cases}$ thì $f(u(x))$ liên tục tại $x = x_0$.

### Sự liên tục của hàm ngược

Nếu $y = f(x)$ đồng biến và liên tục trên khoảng $(a, b)$ thì hàm ngược $y = g(x)$ cũng đồng biến và liên tục trên $f(a, b)$.

# Các tính chất của hàm số liên tục

**Định lý giá trị trung gian**

Cho $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ là một hàm số liên tục. Khi đó $f(x)$ nhận tất cả các giá trị trung gian giữa $f(a)$ và $f(b)$. Nghĩa là, nếu $f(a) \leq f(b)$ thì $\forall c \in [f(a), f(b)], \exists \alpha \in [a, b] : f(\alpha) = c$.

**Định lý Cauchy**

Nếu $f(x)$ liên tục trên $[a, b]$ và $f(a).f(b) < 0$ thì $\exists \alpha \in (a, b)$ sao cho $f(\alpha) = 0$.

**Ví dụ 4.2**

*Cho* $f(x) = ax^2 + bx + c$.

a) *Biết* $a + b + 2c = 0$, *chứng minh rằng* $f(x)$ *có ít nhất một nghiệm trong khoảng* $[0, 1]$.

b) *Biết* $2a + 3b + 6c = 0$, *chứng minh rằng* $f(x)$ *có ít nhất một nghiệm trong khoảng* $[0, 1]$.

# Điểm gián đoạn của hàm số

Điểm liên tục

$$
\begin{aligned}
p =& [\exists \lim_{x\to x_0^-} f(x) \text{ hữu hạn}] \wedge [\exists \lim_{x\to x_0^+} f(x) \text{ hữu hạn}] \\
&\wedge [\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)]
\end{aligned}
$$

### Phân loại điểm gián đoạn

| | |
|---|---|
| $\bar{p} = [\nexists \lim_{x\to x_0^-} f(x)] \vee [\nexists \lim_{x\to x_0^+} f(x)]$ | **Loại II** |
| $\vee [\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \infty] \vee [\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \infty]$ | **Loại II** |
| $\vee [\lim_{x\to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x\to x_0^+} f(x)]$ | **Loại I** |
| $\vee [\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x)] \neq f(x_0)$ | **Bỏ được** |

Nếu $x_0$ là một điểm gián đoạn loại I thì giá trị $\left|f\left(x_0^+\right) - f\left(x_0^-\right)\right|$ gọi là bước nhảy của hàm số.

# Phân loại điểm gián đoạn của hàm số

**Ví dụ 4.3 (Giữa kì, K61)**

*Tìm và phân loại điểm gián đoạn của các hàm số*

*a)* $y = \dfrac{1}{1 - 2^{\tan x}}$. *b)* $y = e^{\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{1}{x}}$. *c)* $y = \dfrac{1}{1 - 2^{\frac{x-1}{x}}}$.

**Chú ý:** Tất cả các hàm số sơ cấp đều liên tục trên TXĐ của chúng.

# Sự liên tục đều

Kí hiệu $I$ là một trong các khoảng sau $(a, b), (a, b], [a, b), [a, b]$.

**Định nghĩa 7**

*Cho hàm số $f(x)$ xác định trên khoảng $I$.*

a) *Ta nói $f(x)$ là liên tục tại $x_0$ nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, nghĩa là*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta = \delta(\epsilon, x_0), \forall x \in I, (|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon).$$

*Hàm số $f(x)$ được gọi là liên tục trên $I$ nếu nó liên tục tại mọi $x_0 \in I$.*

b) *Ta nói $f(x)$ liên tục đều trên $I$ nếu*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta = \delta(\epsilon), \forall x, y \in I, (|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon.)$$

a) Liên tục: $\delta = \delta(\epsilon, x_0)$,

b) Liên tục đều: $\delta = \delta(\epsilon)$ $\boxed{\textbf{LIÊN TỤC ĐỀU} \Rightarrow \textbf{LIÊN TỤC}}$.

Ví dụ: Xét hàm số $f(x) = x$

# Tính liên tục đều

**Định lý 4.1 (Heine-Cantor)**

*Nếu* $f(x)$ *liên tục trên khoảng đóng* $[a, b]$ *thì nó liên tục đều trên đó.*

**Ví dụ 4.4**

*Xét sự liên tục (đều) của hàm số* $f(x) = \dfrac{x}{4 - x^2}$ *trên* $[-1, 1]$.

**Bổ đề 4.1**

i) *Nếu* $f(x)$ *liên tục tại* $x_0$ *thì với mọi dãy* $\{x_n\} \subset I$,

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} f(x_n) = f(x_0).$$

ii) *Nếu* $f(x)$ *liên tục đều trên* $I$ *thì với mọi dãy* $\{x_n\} \subset I$ *và* $\{y_n\} \subset I$,

$$\lim_{n \to +\infty} (x_n - y_n) = 0 \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} [f(x_n) - f(y_n)] = 0.$$

# Tính liên tục đều

Theo tiêu chuẩn kiểu dãy số này, muốn chỉ ra hàm số $f(x)$ không liên tục đều trên $I$, ta chỉ ra hai dãy số $\{x_n\} \subset I$ và $\{y_n\} \subset I$ sao cho

$$\lim_{n\to+\infty}(x_n - y_n) = 0 \textbf{ NHƯNG } \lim_{n\to+\infty}[f(x_n) - f(y_n)] \neq 0.$$

**Ví dụ 4.5**

*Xét tính liên tục đều của hàm số sau trên* $(0,1)$

*a)* $f(x) = \dfrac{1}{x}$,

*b)* $g(x) = \ln x$,

*c)* $h(x) = \sin\dfrac{1}{x}$

# Nội dung

# Đạo hàm

## Định nghĩa 8

a) *Đạo hàm*

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

b) *Đạo hàm phải:*

$$f'(x_0^+) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

c) *Đạo hàm trái:*

$$f'(x_0^-) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

## Ví dụ 5.1

*Giữa kì, K61 Tính* $f'(0)$*, biết* $f(x) = \begin{cases} \sin x, & \textit{nếu } x \geq 0, \\ x^2 + x, & \textit{nếu } x < 0. \end{cases}$

# Đạo hàm

## Các tính chất

a) Mối quan hệ giữa đạo hàm và đạo hàm một phía.

$$\exists f'(x_0) \Leftrightarrow [\exists f'(x_0^+) \text{ hữu hạn}] \wedge [\exists f'(x_0^-) \text{ hữu hạn}] \wedge [f'(x_0^+) = f'(x_0^-)].$$

b) $f(x)$ có đạo hàm tại $x_0 \overset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ liên tục tại $x_0$.

## Các phép toán trên đạo hàm

a) $(u+v)' = u' + v'$,

b) $(u-v)' = u' - v'$,

c) $(uv)' = u'v + uv'$,

d) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.

## Ví dụ 5.2 (Giữa kì, K61)

*Hãy chỉ ra một hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$, liên tục tại các điểm $x_0 = 0, x_1 = 1$ nhưng không có đạo hàm tại các điểm này.*

# Đạo hàm của hàm hợp và hàm ngược

### Đạo hàm của hàm hợp

$$[f\,(u(x))]' = f'_u . u'_x .$$

### Đạo hàm của hàm ngược

a) Hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại $x$ và $f'(x) \neq 0$,

b) hàm số $y = f(x)$ có hàm số ngược $x = \varphi(y)$

thì hàm số $x = \varphi(y)$ có đạo hàm tại $y = f(x)$ và $\varphi'(y) = \dfrac{1}{f'(x)}$.

# Bảng đạo hàm các hàm số sơ cấp cơ bản

a) $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$

b) $(a^x)' = a^x \ln a$

c) $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$

d) $(\sin x)' = \cos x$

e) $(\cos x)' = -\sin x$

f) $(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

g) $(\cot x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$

h) $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

i) $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

j) $(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

k) $(\text{arccot}\, x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

# Vi phân

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại $x_0$. Theo định nghĩa của đạo hàm,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f^{'}(x_0)$$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) - f'(x_0)\Delta(x)}{\Delta x} = 0$$

Do vậy

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) - f^{'}(x_0)\Delta x = o(\Delta x)$$

$$\Rightarrow f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f^{'}(x_0)\Delta x + o(\Delta x)$$

$$\Rightarrow f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \sim f^{'}(x_0)\Delta x \text{ khi } \Delta x \to 0.$$

**Định nghĩa 9**

*Cho hàm số $f(x)$ xác định trong một lân cận $U_\epsilon(x_0)$. Nếu có $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A\Delta x + o(\Delta x)$, ở đó $A$ chỉ phụ thuộc vào $x_0$ chứ không phụ thuộc vào $\Delta x$ thì ta nói hàm số $f(x)$ khả vi tại $x_0$ và*

$$df = A\Delta x.$$

# Vi phân

## Mối liên hệ giữa đạo hàm và vi phân

a) Đối với hàm số một biến số, hàm số có đạo hàm tại $x$ khi và chỉ khi nó khả vi tại $x$, và $df(x) = f'(x)\Delta x$.

b) Nếu $y = x$ thì $dy = dx = 1.\Delta x$. Vì thế với biến số độc lập $x$ ta có $dx = \Delta x$ và do đó,

$$dy = df(x) = f^{'}(x)dx.$$

## Các phép toán trên vi phân

$$d(u \pm v) = du \pm dv, \quad d(u.v) = udv + vdu, \quad d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}.$$

## Ví dụ 5.3 (Giữa kì, K61)

*Tìm $f'(x)$ nếu biết*

*a)* $\dfrac{d}{dx}[f(2016x)] = x^2.$

*b)* $\dfrac{d}{dx}[f(2017x)] = x^2.$

# Ý nghĩa & ứng dụng của vi phân

## Tính bất biến của vi phân cấp một

Cho $y = f(x)$ là một hàm số khả vi.

a) Nếu $x$ là một biến số độc lập thì ta có $dy = f'(x)dx$,

b) Nếu $x$ không phải là một biến số độc lập, chẳng hạn như $x = x(t)$ là một hàm số phụ thuộc vào $t$ chẳng hạn, thì ta vẫn có

$$dy = f'(x)dx.$$

Do đó, vi phân cấp một có tính bất biến.

**Chú ý:** Vi phân cấp cao không có tính bất biến này.

## Ứng dụng của vi phân vào tính gần đúng

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f^{'}(x_0)\Delta x.$$

Ví dụ (Giữa kì, K61): tính gần đúng $\sqrt[3]{7,97}$, $\sqrt[3]{8,03}$.

# Đạo hàm cấp cao

**Định nghĩa 10**

*Nếu hàm số* $y = f(x)$ *có đạo hàm thì* $y' = f'(x)$ *gọi là đạo hàm cấp một của* $f$.

a) *Đạo hàm, nếu có, của đạo hàm cấp một được gọi là đạo hàm cấp hai, kí hiệu là* $f''(x)$.

b) *Đạo hàm, nếu có, của đạo hàm cấp* $n-1$ *được gọi là đạo hàm cấp* $n$, *kí hiệu là* $f^{(n)}(x)$.

**Các phép toán**

a) $(u \pm v)^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)}$,

b) $(u.v)^{(n)} = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)}$ (công thức Leibniz).

# Bảng đạo hàm cấp cao

1) $(x^\alpha)^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$

2) $\left(\dfrac{1}{x+\alpha}\right)^{(n)} = (-1)^n \dfrac{n!}{(x+\alpha)^{n+1}}$

3) $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \dfrac{n\pi}{2}\right)$

d) $(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \dfrac{n\pi}{2}\right)$

e) $(a^x)^{(n)} = a^x(\ln a)^n$

f) $(\ln x)^{(n)} = (-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{x^n}$

**Ví dụ 5.4 (Giữa kì, K61)**

*Tính các đạo hàm cấp cao*

*a)* $[(x^2+x)e^x]^{(20)}$.

*b)* $(x^2\sin 2x)^{(50)}$.

*c)* $(x^2\cos 2x)^{(60)}$.

*d)* $\left(\dfrac{1}{x^2-x}\right)^{(60)}$

*e)* $y^{(10)}(0)$ *với* $y(x) = e^{x^2}$,

*f)* $y^{(9)}(0)$ *với* $y(x) = \arctan x$.

# Vi phân cấp cao

## Định nghĩa 11

a) *Vi phân của vi phân cấp một* $d(d(f(x)))$ *được gọi là vi phân cấp hai của hàm số* $f(x)$, *và được kí hiệu là* $d^2 f(x)$.

b) *Tương tự như vậy,* $d^n f(x) = d(d^{n-1} f(x))$.

## Công thức tính

a) Nếu $x$ là biến số độc lập thì $d^n f(x) = f^{(n)}(x)dx^n$.

b) Chú ý rằng vi phân cấp cao không có tính bất biến, chẳng hạn như, nếu $x$ phụ thuộc vào $t$ thì

$$df(x) = f'(x)dx, \quad d^2 f(x) = f'(x)d^2x + f''(x)dx^2 \neq f''(x)dx^2.$$

## Ví dụ 5.5 (Học kì 20163)

*Cho* $y = (2x+1)\sin x$. *Tính* $d^{(10)}y(0)$.

# Nội dung

# Các định lý về hàm khả vi

**Định lý Fermat**

Giả thiết hàm số $f(x)$

a) xác định trên $(a, b)$,

b) đạt cực trị tại $x_0 \in (a, b)$,

c) tồn tại $f'(x_0)$.

Khi đó, $f'(x_0) = 0$.

Nếu $f(x)$ đạt CĐ tại $x_0$ thì

i) $f'(x_0^+) = \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leq 0.$

ii) $f'(x_0^-) = \lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0.$

$\exists f'(x_0) \Rightarrow f'(x_0^+) = f'(x_0^-)$. Điều này chỉ xảy ra khi $f'(x_0^+) = f'(x_0^-) = 0$.

# Các định lý về hàm khả vi

**Định lý Rolle**

Nếu hàm số $f(x)$

a) Liên tục trong đoạn $[a, b]$,

b) Có đạo hàm trong khoảng $(a, b)$,

c) thỏa mãn điều kiện $f(a) = f(b)$,

thì tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a, b)$ sao cho $f^{'}(c) = 0$.

**Ví dụ 6.1 (Học kì 20163)**

*Cho hàm số $f(x) = (x-1)(x^2-2)(x^2-3)$. Phương trình $f'(x) = 0$ có bao nhiêu nghiệm thực? Giải thích.*

# Các định lý về hàm khả vi

**Định lý Lagrange**

Nếu hàm số $f(x)$

a) Liên tục trong đoạn $[a, b]$,

b) Có đạo hàm trong khoảng $(a, b)$,

thì tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a, b)$ sao cho $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

**Ví dụ 6.2 (Giữa kì, K61)**

*Chứng minh rằng* $\dfrac{b-a}{1+b^2} < \arctan b - \arctan a < \dfrac{b-a}{1+a^2}$ *với* $0 < a < b$.

# Các định lý về hàm khả vi

## Định lý Cauchy

Nếu các hàm số $f(x), g(x)$ thỏa mãn các điều kiện

a) Liên tục trong đoạn $[a, b]$,

b) Có đạo hàm trong khoảng $(a, b)$,

c) $g^{'}(x) \neq 0, \forall x \in (a, b)$. Khi đó,

$$\exists c \in (a, b) \text{ sao cho } \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f^{'}(c)}{g'(c)}.$$

# Các công thức khai triển Taylor, Maclaurin

**Định lý 6.1**

*Nếu hàm số $f(x)$ Có đạo hàm đến cấp $n+1$ trong khoảng $(a,b)$, $x_0 \in (a,b)$, thì $f(x)$ có thể biểu diễn dưới dạng*

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{'}(x_0)}{1!}(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

*ở đó $c$ là một số thực nằm giữa $x$ và $x_0$ nào đó.*

Nếu $x_0 = 0$ thì công thức sau còn được gọi là công thức Maclaurin:

$$f(x) = f(0) + \frac{f^{'}(0)}{1!}x + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

# Một số khai triển Maclaurin

a) $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \cdots + \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$

b) $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$

c) $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)$

d) $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + o(x^n)$

e) $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$

f) $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$

g) $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n} + o(x^n)$

**Ứng dụng**

a) Tính gần đúng.

b) Tính giới hạn.

# Công thức Maclaurin

**Tính gần đúng**

Tính gần đúng số $e$ với sai số nhỏ hơn $0,0001$.

**Tính giới hạn**

Tính
$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}.$$

**Ví dụ 6.3 (Giữa kì, K61)**

*Tính giới hạn*

*a)* $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\cos x-\ln(1+x)}{x^2}.$

*b)* $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\ln(1+x)}{x^2}.$

*c)* $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\dfrac{1}{1-x}}{x^2}.$

*d)* $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\sin x-\cos x}{x^2}.$

*e)* $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-\sin x}{x^2}.$

*f)* $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1-\sin 2x}{x^2}.$

# Quy tắc L'Hospital

**Định lý 6.2 (Quy tắc L'Hospital)**

*Giả thiết*

*i) Các hàm số $f(x), g(x)$ khả vi trong một lân cận nào đó của điểm $a$ (có thể trừ tại $a$), $g^{'}(x) \neq 0$ trong lân cận ấy,*

*ii) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$.*

*Khi đó nếu tồn tại $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f^{'}(x)}{g^{'}(x)} = A$ thì $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = A$.*

# Công thức L'Hospital

**Chú ý 6.1**

*Công thức L'Hospital vẫn đúng nếu*

a) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} g(x) = 0$,

b) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty, \lim\limits_{x \to a} g(x) = \pm\infty$,

c) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty, \lim\limits_{x \to \infty} g(x) = \pm\infty$.

d) $A = \pm\infty$.

*Công thức L'Hospital chỉ là điều kiện đủ.*
*Ví dụ (Cuối kì, 20163). Tính*

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x + \sin x}{x + 1}.$$

# Về các dạng vô định $1^\infty, 0^0, \infty^0$

**Chuyển định dạng**

$$I = \lim_{x\to x_0} A(x)^{B(x)} = e^{\lim\limits_{x\to x_0} B(x)\ln A(x)} = e^J.$$

Nếu $I$ có dạng vô định $1^\infty, 0^0, \infty^0$ thì $J$ ở dạng $0\times\infty$.

**Ví dụ 6.4**

*Tính* $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{\dfrac{x-1}{x+1}}$, $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$, $\lim_{x\to 0}(1-\cos x)^{x^2}$, $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}(\tan x)^{\tan 2x}$.

# Về các VCL tiêu biểu

Ba VCL tiêu biểu (khi $x \to +\infty$), đó là

a) Các hàm số mũ với cơ số lớn hơn $1$, ví dụ $a^x \ (a > 1)$,

b) Các hàm số đa thức, các hàm số là lũy thừa của $x$, chẳng hạn $x^n, x^\alpha, \ (\alpha > 0)$,

c) Các hàm số logarit với cơ số lớn hơn $1$, như $\ln x, \log_a x \ (a > 1)$.

Ba hàm số này tiến ra vô cùng khi $x \to +\infty$ với tốc độ khác nhau.

$$\boxed{\textbf{Hàm số mũ}} \succ \boxed{\textbf{Hàm số đa thức}} \succ \boxed{\textbf{Hàm số logarit}}$$

Cụ thể,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x^\alpha} = +\infty, \lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{\log_a x} = +\infty, \ \forall a > 1, \alpha > 0.$$

**Ví dụ 6.5**

*Tính*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x + x^{2016} + e^x}{\log_2 x + x^{2017} + 2e^x}.$$

# Một số bài tập bổ sung

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x - x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x} - \cot x\right)$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x) - x\sqrt[3]{1-x^2}}{x^5}$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\ln(1+x)^{\frac{1}{x^2}} - \frac{e^x}{x}\right]$

e) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$

f) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right)$

g) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\tan x - x}{x - \sin x}\right)$

h) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right)$

i) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arctan x}{\sin x - x}$

j) $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{1 + 2\ln(\sin x)}$

k) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cos x}{x^3}$

l) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{\sqrt{1 + x\sin x} - \sqrt{\cos x}}$

m) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)}, a \neq 0, b \neq 0$

n) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2}{\pi}\arctan x\right)^x$

o) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{a^{1/x} + b^{1/x}}{2}\right)^x, a, b > 0$

p) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1 - \sqrt{1+x^2}\cos x}{x(\tan x - \sinh x)}$

# Hàm số đơn điệu và các tính chất

**Định nghĩa 12**

*Hàm số* $f(x)$ *xác định trên* $(a, b)$ *được gọi là*

a) *đơn điệu tăng nếu với mọi* $x_1, x_2 \in (a, b), x_1 < x_2$ *thì* $f(x_1) \leq f(x_2)$,

b) *đơn điệu giảm nếu với mọi* $x_1, x_2 \in (a, b), x_1 < x_2$ *thì* $f(x_1) \geq f(x_2)$,

c) *tăng ngặt nếu với mọi* $x_1, x_2 \in (a, b), x_1 < x_2$ *thì* $f(x_1) < f(x_2)$,

d) *giảm ngặt nếu với mọi* $x_1, x_2 \in (a, b), x_1 < x_2$ *thì* $f(x_1) > f(x_2)$.

# Hàm số đơn điệu và các tính chất

**Định lý 6.3**

*Cho hàm số $f(x)$ xác định và có đạo hàm trong khoảng $(a, b)$. Khi đó, nếu $f'(x) \geq 0 \ \forall x \in (a, b)$ thì $f(x)$ đơn điệu tăng trên $(a, b)$.*

**Chú ý 6.2**

a) *Trong Định lý trên ta đã giả thiết $f(x)$ là hàm số có đạo hàm trong khoảng $(a, b)$. Tuy nhiên, trong thực tế, một hàm số đơn điệu không nhất thiết phải có đạo hàm. Thậm chí, nó có thể còn không liên tục.*

b) *Xét tính đơn điệu của hàm số $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Khi xét tính đơn điệu của hàm số, người ta chỉ xét tại những khoảng (đoạn) mà hàm số đó được xác định.*

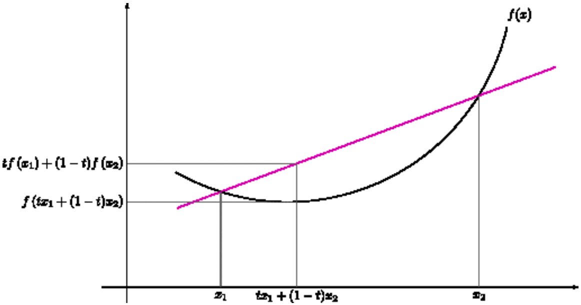
c) *Hàm số đơn điệu chỉ có thể có các điểm gián đoạn loại I.*

# Hàm lồi

**Định nghĩa 13**

*Hàm số $f(x)$ xác định trong khoảng $I$ được gọi là lồi nếu*

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2), \quad \forall x_1, x_2 \in I \text{ và } \forall t \in [0,1].$$



# Hàm số lồi

**Định lý 6.4**

*Cho hàm số $f(x)$ xác định, liên tục trong khoảng $I$ và có đạo hàm đến cấp hai trong $I$. Khi đó, nếu $f''(x) > 0$ trong $I$ thì $f$ là hàm số lồi trong $I$.*

**Chú ý 6.3**

*Hàm số $f$ được gọi là lõm trên khoảng $I$ nếu $-f$ là hàm số lồi trên khoảng đó.*

# BĐT hàm lồi

**Định lý 6.5 (Bất đẳng thức Jensen)**

*Cho* $f$ *là hàm lồi trên* $(a, b)$, $x_1, x_2, \dots, x_n \in (a, b)$ *và* $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in [0, 1]$, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$. *Khi đó*

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i).$$

**Hệ quả 1 (BĐT Cauchy (BĐT trung bình))**

*Áp dụng BĐT Jensen với* $f(x) = -\ln x$ *ta được:*

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i \geq \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{1/n} \quad \forall a_1, a_2, \dots, a_n > 0.$$

# Cực trị của hàm số

**Định nghĩa 14**

*Cho hàm số* $f(x)$ *liên tục trên* $(a,b)$, *ta nói hàm số đạt cực trị tại điểm* $x_0 \in (a,b)$ *nếu tồn tại một lân cận của* $x_0$, $U(x_0) \subset (a,b)$ *sao cho* $f(x) - f(x_0)$ *không đổi dấu* $\forall x \in U(x_0) \setminus \{x_0\}$.

a) *Nếu* $f(x) - f(x_0) > 0$ *thì ta nói hàm số đạt cực tiểu tại* $x_0$.

b) *Nếu* $f(x) - f(x_0) < 0$ *thì ta nói hàm số đạt cực đại tại* $x_0$.

**Định lý 6.6 (Định lý Fermat )**

*Cho* $f(x)$ *liên tục trên khoảng* $(a,b)$, *nếu hàm số đạt cực trị tại điểm* $x_0 \in (a,b)$ *và có đạo hàm tại* $x_0$ *thì* $f^{'}(x_0) = 0$.

# Cực trị của hàm số một biến số

**Định lý 6.7 (Điều kiện đủ của cực trị)**

*Giả thiết hàm số $f(x)$ khả vi trong khoảng $(a, b) \setminus \{x_0\}$, ở đó $x_0 \in (a, b)$ là một điểm tới hạn (đạo hàm bằng $0$ hoặc không xác định).*

a) *Nếu khi đi qua $x_0$ mà $f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm thì $f(x)$ đạt cực đại tại $x_0$.*

b) *Nếu khi đi qua $x_0$ mà $f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương thì $f(x)$ đạt cực tiểu tại $x_0$.*

**Ví dụ 6.6**

*Tìm các cực trị của hàm số*

a) $y = \dfrac{2x}{x^2+2}$.

b) $y = x - 3\sqrt[3]{x^2}$.

# Cực trị của hàm số một biến số

**Định lý 6.8**

*Giả thiết hàm số* $f(x)$ *có đạo hàm đến cấp hai liên tục ở lân cận của điểm* $x_0$ *và* $f^{'}(x_0) = 0$. *Khi đó*

*a) Nếu* $f^{''}(x_0) > 0$ *thì* $f(x)$ *đạt cực tiểu tại* $x_0$.

*b) Nếu* $f^{''}(x_0) < 0$ *thì* $f(x)$ *đạt cực đại tại* $x_0$.

**Ví dụ 6.7 (Giữa kì, K61)**

*Tìm các cực trị của hàm số* $y = \dfrac{\sin x}{2 + \cos x}$ *trong khoảng* $(0, 2\pi)$.

# Cực trị của hàm số một biến số

## Định lý 6.9

*Giả thiết hàm số* $f(x)$ *có đạo hàm liên tục đến cấp* $n$ *tại lân cận của điểm* $x_0$ *và*

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

*Khi đó*

a) *Nếu* $n$ *chẵn thì* $f(x_0)$ *đạt cực trị tại* $x_0$ *và đạt cực tiểu nếu* $f^{(n)}(x_0) > 0$, *đạt cực đại nếu* $f^{(n)}(x_0) < 0$.

b) *Nếu* $n$ *lẻ thì* $f(x)$ *không đạt cực trị tại* $x_0$.

## Ví dụ 6.8

*Tìm cực trị của hàm số* $y = \sin^3 x, \quad y = \sin^4 x$.

# Phương pháp Newton

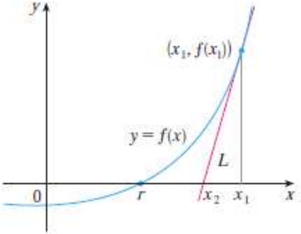
Phương pháp này có thể được sử dụng tìm nghiệm của phương trình $f(x) = 0$ khi hàm $f$ thỏa mãn một số giả thiết sau:

(i) $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$;

(ii) $f(a)f(b) < 0$;

(iii) $f'(x), f''(x)$ không đổi dấu trên $(a, b)$.

Công thức tìm nghiệm gần đúng của phương trình $f(x) = 0$ như sau.




a) Chọn một xấp xỉ $x_1$,

b) Viết PTTT tại điểm $(x_1, f(x_1))$,

c) Tìm giao điểm của TT với $Ox$.

d) $x_2 = x_1 - \dfrac{f(x_1)}{f'(x_1)}$

e) $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

**Ví dụ:** Bắt đầu với $x_1 = 2$, tìm xấp xỉ thứ ba, $x_3$, của nghiệm của phương trình $x^3 - 2x - 5 = 0$.

# Nội dung

# Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số $y = f(x)$

a) Tìm TXĐ của hàm số, nhận xét tính chẵn, lẻ, tuần hoàn của hàm số (nếu có).

b) Xác định chiều biến thiên: tìm các khoảng tăng, giảm của hàm số.

c) Tìm cực trị (nếu có).

d) Xét tính lồi, lõm (nếu cần thiết), điểm uốn (nếu có).

e) Tìm các tiệm cận của hàm số (nếu có).

f) Lập bảng biến thiên.

g) Tìm một số điểm đặc biệt mà hàm số đi qua (ví dụ như giao điểm với các trục toạ độ, ....) và vẽ đồ thị của hàm số.

**Ví dụ 7.1 (Cuối kì, K59)**

*Tìm tiệm cận của đồ thị hàm số* $y = xe^{\frac{1}{x}} + 1$.

**Ví dụ 7.2 (Giữa kì, K61)**

*Tìm các cực trị của hàm số* $y = \dfrac{\cos x}{2 + \sin x}$ *trong khoảng* $(0, 2\pi)$.

# Vẽ đường cong cho dưới dạng tham số

Khảo sát và vẽ đường cong cho dưới dạng tham số $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$

## Chiều biến thiên - Tính lồi lõm

a) Khảo sát sự biến thiên của $x, y$ theo $t$ bằng cách xét dấu $x'(t), y'(t)$.

b) Khảo sát sự biến thiên của $y$ theo $x$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t}$$

Đây cũng chính là hệ số góc của tiếp tuyến.

c) Tính lồi lõm và điểm uốn (nếu cần thiết):

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)}{dx} = \frac{y_{tt}" x'_t - y'_t x_t"}{x'^3_t}.$$

# Đường cong cho dưới dạng tham số

## Tiệm cận

a) TCĐ: Nếu $\begin{cases} \lim\limits_{t\to t_0(\infty)} x(t) = x_0 \\ \lim\limits_{t\to t_0(\infty)} y(t) = \infty \end{cases}$ thì $x = x_0$ là một TCĐ.

b) TCN: Nếu $\begin{cases} \lim\limits_{t\to t_0(\infty)} x(t) = \infty \\ \lim\limits_{t\to t_0(\infty)} y(t) = y_0 \end{cases}$ thì $y = y_0$ là một TCN.

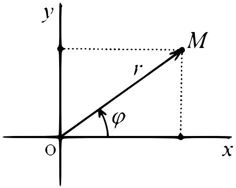
c) TCX: Nếu $\begin{cases} \lim\limits_{t\to t_0(\infty)} y(t) = \infty \\ \lim\limits_{t\to t_0(\infty)} x(t) = \infty \end{cases}$ và $\begin{cases} a = \lim\limits_{t\to t_0(\infty)} \dfrac{y(t)}{x(t)}, \\ b = \lim\limits_{t\to t_0(\infty)} [y(t) - ax(t)] \end{cases}$ thì $y = ax + b$ là một TCX.

## Ví dụ 7.3 (Giữa kì, K61)

*Tìm các tiệm cận của đường cong cho bởi* $x = \dfrac{2016t}{1-t^3}, y = \dfrac{2016t^2}{1-t^3}$.

# Vẽ đường cong trong hệ tọa độ cực

Trong mặt phẳng, chọn một điểm $O$ cố định làm *gốc cực* và một tia $Ox$ là *trục cực*. Vị trí của mỗi điểm $M$ trong mặt phẳng được xác định bởi véc tơ $\overrightarrow{OM}$. Gọi $r = |\overrightarrow{OM}| \geq 0$ là bán kính cực và góc $\varphi = (Ox, \overrightarrow{OM}) \in [0, 2\pi)$ là góc cực. Cặp số $(r, \varphi)$ được gọi là *tọa độ cực* của điểm $M$.
Tọa độ cực suy rộng: Ta mở rộng tọa độ cực cho trường hợp $r \in \mathbb{R}, \varphi \in \mathbb{R}$. Với $\varphi \in \mathbb{R}$ thì ta hiểu đây là góc lượng giác, còn nếu $r < 0$ thì ta xác định điểm $M(r, \varphi)$ trùng điểm $M(-r, \varphi + \pi)$.




Trong hệ trục tọa độ Đề các vuông góc ta lấy trục hoành làm trục cực. Khi đó một điểm $M$ trong mặt phẳng sẽ có tọa độ Đề các $M(x, y)$ và tọa độ cực $M(r, \varphi)$. Công thức liên hệ giữa hai tọa độ là:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}, \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan\varphi = \dfrac{y}{x}, \ (x \neq 0). \end{cases}$$

# Vẽ đường cong trong hệ tọa độ cực

**Ví dụ 7.4**

*Khảo sát và vẽ đường cong* $r = a\,(1 + \cos\varphi) \quad (a > 0)$, *(đường Cardioid hay đường hình tim)*