BÀI TẬP GIẢI TÍCH 2 (Nhóm 1)

CHƯƠNG 1
Ứng dụng của phép tính vi phân trong hình học

Ứng dụng trong hình học phẳng

1. Viết phương trình tiếp tuyến và pháp tuyến với đường cong:

a) $y = x^3 + 2x^2 - 4x - 3$ tại điểm $(-2;5)$.

b) $y = e^{1-x^2}$ tại giao điểm của đường cong với đường thẳng $y = 1$.

c) $\begin{cases} x = \dfrac{1+t}{t^3} \\ y = \dfrac{3}{2t^3} + \dfrac{1}{2t} \end{cases}$ tại điểm $A(2;2)$.

d) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 5$ tại điểm $M(8;1)$.

2. Tính độ cong của:

a) $y = -x^3$ tại điểm có hoành độ $x = \dfrac{1}{2}$.

b) $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ $(a > 0)$ tại điểm bất kỳ.

c) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, $(a > 0)$ tại điểm (x, y) bất kỳ.

d) $r = ae^{b\varphi}$, $(a, b > 0)$ tại điểm bất kỳ.

3. Tìm hình bao của họ các đường cong sau:

a) $y = \dfrac{x}{c} + c^2$ b) $cx^2 + c^2 y = 1$ c) $y = c^2(x-c)^2$.

Ứng dụng trong hình học không gian

1. Giả sử $\vec{p}(t)$, $\vec{q}(t)$, $\alpha(t)$ là các hàm khả vi. Chứng minh rằng:

a) $\dfrac{d}{dt}\left(\vec{p}(t) + \vec{q}(t)\right) = \dfrac{d\vec{p}(t)}{dt} + \dfrac{d\vec{q}(t)}{dt}$.

b) $\dfrac{d}{dt}(\alpha(t)\vec{p}(t)) = \alpha(t)\dfrac{d\vec{p}(t)}{dt} + \alpha'(t)\vec{p}(t)$.

c) $\dfrac{d}{dt}\left(\vec{p}(t)\vec{q}(t)\right) = \vec{p}(t)\dfrac{d\vec{q}(t)}{dt} + \vec{q}(t)\dfrac{d\vec{p}(t)}{dt}$.

d) $\dfrac{d}{dt}\left(\vec{p}(t) \wedge \vec{q}(t)\right) = \vec{p}(t) \wedge \dfrac{d\vec{q}(t)}{dt} + \dfrac{d\vec{p}(t)}{dt} \wedge \vec{q}(t)$.

2. Viết phương trình tiếp tuyến và pháp diện của đường:

a) $\begin{cases} x = a\sin^2 t \\ y = b\sin t\cos t \\ z = c\cos^2 t \end{cases}$ tại điểm ứng với $t = \dfrac{\pi}{4}$, $(a,b,c > 0)$.

b) $\begin{cases} x = \dfrac{e^t \sin t}{\sqrt{2}} \\ y = 1 \\ z = \dfrac{e^t \cos t}{\sqrt{2}} \end{cases}$ tại điểm ứng với $t = 0$.

3. Viết phương trình pháp tuyến và tiếp diện của mặt cong:

a) $x^2 - 4y^2 + 2z^2 = 6$ tại điểm $(2;2;3)$.

b) $z = 2x^2 + 4y^2$ tại điểm $(2;1;12)$.

c) $z = \ln(2x + y)$ tại điểm $(-1;3;0)$.

4. Viết phương trình tiếp tuyến và pháp diện của đường:

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ y^2 + z^2 = 25 \end{cases}$ tại điểm $A(1;3;4)$.

b) $\begin{cases} 2x^2 + 3y^2 + z^2 = 47 \\ x^2 + 2y^2 = z \end{cases}$ tại điểm $B(-2;1;6)$.

CHƯƠNG 2
Tích phân bội

Tích phân kép

1. Thay đổi thứ tự lấy tích phân của các tích phân sau

a) $\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x,y)dy$ b) $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$ c) $\int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x}} f(x,y)dy$

d) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} dy \int\limits_{\sin y}^{1+y^2} f(x,y)dx$ e) $\int\limits_{0}^{\sqrt{2}} dy \int\limits_{0}^{y} f(x,y)dx + \int\limits_{\sqrt{2}}^{2} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)dx$

2. Tính các tích phân sau

a) $\iint\limits_D x\sin(x+y)dxdy$ với $D = \{(x,y) \in R^2 : 0 \le x \le \frac{\pi}{2}\ ;\ 0 \le y \le \frac{\pi}{2}\}$.

b) $\iint\limits_D x^2(y-x)dxdy$ với D là miền giới hạn bởi các đường cong $x = y^2$ và $y = x^2$.

c) $\iint\limits_D |x+y|\, dxdy$ với $D = \{(x,y) \in R^2 : |x| \le 1\ ; |y| \le 1\}$.

d) $\iint\limits_D \sqrt{|y - x^2|}dxdy$, với $D = \{(x,y) \in R^2 : |x| \le 1\ ; 0 \le y \le 2\}$.

e) $\iint\limits_D |y-x^2|^3\,dxdy$, với $D = \{(x,y) \in R^2 : |x| \le 1\,; 0 \le y \le 2\}$.

f) $\iint\limits_D 2xydxdy$ với D giới hạn bởi các đường $x = y^2; x = -1; y = 0$ và $y = 1$.

g) $\iint\limits_{|x|+|y|\le 1} \left(|x|+|y|\right)dxdy$.

h) $\iint\limits_D (x+y)dxdy$ với D giới hạn bởi các đường $x^2+y^2 \le 1; \sqrt{x}+\sqrt{y} \ge 1$.

3. Tìm cận lấy tích phân trong tọa độ cực của $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ trong đó D là miền xác định như sau:

a) $a^2 \le x^2+y^2 \le b^2,\ (a,b>0)$.

b) $x^2+y^2 \ge 4x,\ x^2+y^2 \le 8x,\ y \ge x,\ y \le 2x$.

c) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \le 1,\ y \ge 0,\ (a,b>0)$.

4. Dùng phép đổi biến trong tọa độ cực, hãy tính các tích phân sau

a) $\int\limits_0^R dx \int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \ln(1+x^2+y^2)dy,\ (R>0)$.

b) $\int\limits_0^R dx \int\limits_{-\sqrt{Rx-x^2}}^{\sqrt{Rx-x^2}} \sqrt{Rx-x^2-y^2}\,dy,\ (R>0)$.

c) $\iint\limits_D xydxdy$, với

1) D là mặt tròn $(x-2)^2+y^2 \le 1$

2) D là nửa mặt tròn $(x-2)^2+y^2 \le 1,\ y \ge 0$.

d) $\iint\limits_D xydxdy$, với D là miền giới hạn bởi các đường tròn $x^2+(y-1)^2=1$ và $x^2+y^2-4y=0$.

5. Chuyển tích phân sau theo hai biến u và v:

a) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{-x}^{x} f(x,y)dy$, nếu đặt $\begin{cases} u = x+y \\ v = x-y \end{cases}$

b) Áp dụng tính với $f(x,y) = (2-x-y)^2$.

6. Tính các tích phân sau

a) $\iint\limits_D \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^2}$, trong đó $D: \begin{cases} 4y \le x^2+y^2 \le 8y \\ x \le y \le \sqrt{3}x \end{cases}$

b) $\iint\limits_D \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}dxdy$, trong đó $D: x^2+y^2 \le 1$.

c) $\iint\limits_D \frac{xy}{x^2+y^2}dxdy$, trong đó $D: \begin{cases} x^2+y^2 \le 12 \\ x^2+y^2 \ge 2x \\ x^2+y^2 \ge 2\sqrt{3}y \\ x \ge 0,\ y \ge 0 \end{cases}$

d) $\iint\limits_D |9x^2-4y^2|\,dxdy$, trong đó $D: \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9} \le 1$

e) $\iint\limits_D (4x^2-2y^2)\,dxdy$, trong đó $D: \begin{cases} 1 \le xy \le 4 \\ x \le y \le 4x \end{cases}$

Tích phân bội 3

Tính các tích phân bội ba sau

1. $\iiint\limits_V z\,dxdydz$, trong đó miền V được xác định bởi: $0 \le x \le \dfrac{1}{4}$, $x \le y \le 2x$, $0 \le z \le \sqrt{1-x^2-y^2}$.

2. $\iiint\limits_V (x^2+y^2)\,dxdydz$, trong đó V xác định bởi: $x^2+y^2+z^2 \le 1$, $x^2+y^2-z^2 \le 0$.

3. $\iiint\limits_V (x^2+y^2)z\,dxdydz$, trong đó V xác định bởi: $x^2+y^2 \le 1$, $1 \le z \le 2$.

4. $\iiint\limits_V z\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz$, trong đó

   a) V là miền giới hạn bởi mặt trụ: $x^2+y^2=2x$ và các mặt phẳng: $y=0$, $z=0$, $z=a$, $(a>0)$.

   b) V là nửa của hình cầu $x^2+y^2+z^2 \le a^2$, $z \ge 0$, $(a>0)$.

   c) V là nửa của khối elipxôit $\dfrac{x^2+y^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{b^2} \le 1$, $z \ge 0$, $(a,b>0)$.

5. $\iiint\limits_V y\,dxdydz$, trong đó V là miền giới hạn bởi mặt nón: $y=\sqrt{x^2+z^2}$ và mặt phẳng $y=h$, $(h>0)$.

6. $\iiint\limits_V \left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\right)dxdydz$, trong đó V là miền giới hạn bởi $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$, $(a,b,c>0)$.

7. $\iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)\,dxdydz$, trong đó $V: 1 \le x^2+y^2+z^2 \le 4$, $x^2+y^2 \le z^2$.

8. $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz$, trong đó V là miền giới hạn bởi $x^2+y^2=z^2$, $z=1$.

9. $\iiint\limits_D \dfrac{dxdydz}{(x^2+y^2+(z-2)^2)^2}$, trong đó $V: x^2+y^2 \le 1$, $|z| \le 1$.

10. $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz$, trong đó V là miền xác định bởi $x^2+y^2+z^2 \le z$.

Ứng dụng của tích phân bội

1. Tính diện tích của miền D giới hạn bởi các đường $y = 2^x$, $y = 2^{-x}$, $y = 4$.

2. Tính diện tích của miền D giới hạn bởi các đường

$$y^2 = x,\ y^2 = 2x,\ x^2 = y,\ x^2 = 2y.$$

3. Tính diện tích của miền D giới hạn bởi

$$y = 0,\ y^2 = 4ax,\ x + y = 3a,\ y \le 0,\ (a > 0).$$

4. Tính diện tích của miền D giới hạn bởi $2x \le x^2 + y^2 \le 4x$, $0 \le y \le x$.

5. Tính diện tích của miền D giới hạn bởi các đường tròn $r \ge 1$; $r \le \dfrac{2}{\sqrt{3}}\cos\varphi$.

6. Tính diện tích của miền D giới hạn bởi các đường

   a) $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy$, $(a > 0)$. b) $x^3 + y^3 = axy$, $(a > 0)$.

   c) $r = a(1 + \cos\varphi)$, $(a > 0)$.

7. Chứng minh rằng diện tích miền D xác định bởi $x^2 + (\alpha x - y)^2 \le 1$ không đổi $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

8. Tính thể tích của miền giới hạn bởi các mặt

$$3x + y \ge 1,\ 3x + 2y \le 2,\ y \ge 0,\ 0 \le z \le 1 - x - y.$$

9. Tính thể tích của miền giới hạn bởi các mặt $z = 4 - x^2 - y^2$, $2z = 2 + x^2 + y^2$.

10. Tính thể tích của miền giới hạn bởi $0 \le z \le 1 - x^2 - y^2$, $y \ge x$, $y \le \sqrt{3}x$.

11. Tính thể tích của miền V giới hạn bởi mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$ và nằm trong mặt trụ $x^2 + y^2 - 2ay = 0$, $(a > 0)$.

12. Tính thể tích của miền giới hạn bởi các mặt $z = 0$, $z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$, $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{2x}{a}$, $(a, b > 0)$.

13. Tính thể tích của miền giới hạn bởi các mặt $az = x^2 + y^2$, $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $(a > 0)$.

CHƯƠNG 3
Tích phân phụ thuộc tham số

1. Khảo sát sự liên tục của tích phân $I(y)=\int_0^1 \frac{yf(x)}{x^2+y^2}dx$ với $f(x)$ là hàm số dương, liên tục trên đoạn $[0,1]$.

2. Tính các tích phân sau

a) $\int_0^1 x^{\alpha}(\ln x)^n dx$, n là số nguyên dương. b) $\int_0^{\pi/2} \ln(1+y\sin^2 x)dx$, với $y>-1$.

3. Tìm $\lim\limits_{y\to 0}\int_y^{1+y}\frac{dx}{1+x^2+y^2}$.

4. Xét tính liên tục của hàm số $I(y)=\int_0^1 \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}dx$.

5. Chứng minh rằng tích phân phụ thuộc tham số $I(y)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\arctan(x+y)}{1+x^2}dx$ là một hàm số liên tục, khả vi đối với biến y. Tính $I'(y)$ rồi suy ra biểu thức của $I(y)$.

6. Tính các tích phân sau

a) $\int_0^1 \frac{x^b-x^a}{\ln x}dx$, $(0<a<b)$. b) $\int_0^{\infty}\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}dx$, $(\alpha>0,\beta>0)$.

c) $\int_0^{\infty}\frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x^2}dx$, $(\alpha>0,\beta>0)$. d) $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+y)^{n+1}}$.

e) $\int_0^{+\infty} e^{-ax}\frac{\sin(bx)-\sin(cx)}{x}dx$, $(a,b,c>0)$. f) $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\cos(yx)dx$.

7. Biểu thị $\int_0^{\pi/2}\sin^m x\cos^n x dx$ qua hàm $B(m,n)$, $(m,n\in\mathbb{Z}; m,n>1)$.

8. Tính các tích phân sau

a) $\int_0^{\pi/2}\sin^6 x\cos^4 x dx$. b) $\int_0^a x^{2n}\sqrt{a^2-x^2}dx$, $(a>0)$, (*Gợi ý đặt* $x=a\sqrt{t}$)

c) $\int_0^{+\infty} x^{10}e^{-x^2}dx$. d) $\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}}{(1+x^2)^2}dx$. e) $\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^3}dx$.

f) $\int_0^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{(1+x^n)^2}dx$, $2<n\in\mathbb{N}$. g) $\int_0^1\frac{1}{\sqrt[n]{1-x^n}}dx$, $(n\in\mathbb{N}^*,\ n>1)$.

CHƯƠNG 4
Tích phân đường

Tích phân đường loại 1

Tính các tích phân sau:

1. $\int\limits_C (x-y)ds$, C là đường tròn $x^2+y^2=2x$.

2. $\int\limits_C y^2 ds$, C là đường có phương trình $\begin{cases} x=a(t-\sin t) \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}$ $(0\le t\le 2\pi, a>0)$.

3. $\int\limits_C \sqrt{x^2+y^2}\,ds$, C là đường cong $\begin{cases} x=a(\cos t+t\sin t) \\ y=a(\sin t-t\cos t) \end{cases}$ $(0\le t\le 2\pi, a>0)$.

Tính phân đường loại 2

Tính các tích phân sau:

1. $\int\limits_{AB} (x^2-2xy)dx+(2xy-y^2)dy$, trong đó AB là cung parabol $y=x^2$ từ $A(1;1)$ đến $B(2;4)$.

2. $\int\limits_C (2x-y)dx+xdy$, trong đó C là đường cong $\begin{cases} x=a(t-\sin t) \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}$ theo chiều tăng của t, $(0\le t\le 2\pi, a>0)$.

3. $\int\limits_{ABCA} 2(x^2+y^2)dx+x(4y+3)dy$, trong đó $ABCA$ là đường gấp khúc đi qua $A(0;0)$, $B(1;1)$, $C(0;2)$.

4. $\int\limits_{ABCDA} \dfrac{dx+dy}{|x|+|y|}$, trong đó $ABCDA$ là đường gấp khúc đi qua $A(1;0)$, $B(0;1)$, $C(-1;0)$, $D(0;-1)$.

5. $\int\limits_C \dfrac{\sqrt[4]{x^2+y^2}\,dx}{2}+dy$, trong đó C là đường cong $\begin{cases} x=t\sin\sqrt{t} \\ y=t\cos\sqrt{t} \end{cases}$ theo chiều tăng của $0\le t\le \pi^2/4$.

6. Tính tích phân sau

$$\int\limits_C (xy+x+y)dx+(xy+x-y)dy$$

bằng hai cách: tính trực tiếp, tính nhờ công thức Green rồi so sánh các kết quả, với C là đường:

a) $x^2+y^2=R^2$.

b) $x^2+y^2=2x$.

c) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, $(a,b>0)$.

7. $\displaystyle\oint\limits_{x^2+y^2=2x} x^2\left(y+\frac{x}{4}\right)dy-y^2\left(x+\frac{y}{4}\right)dx$.

8. $\displaystyle\oint\limits_{OABO} e^x[(1-\cos y)dx-(y-\sin y)dy]$, trong đó $OABO$ là đường gấp khúc qua $O(0;0)$, $A(1;1)$, $B(0;2)$.

9. $\displaystyle\oint\limits_{x^2+y^2=2x} (xy+e^x\sin x+x+y)dx-(xy-e^{-y}+x-\sin y)dy$.

10. $\displaystyle\oint\limits_C (xy^4+x^2+y\cos(xy))dx+\left(\frac{x^3}{3}+xy^2-x+x\cos(xy)\right)dy$, trong đó C là đường cong $\begin{cases}x=a\cos t\\ y=a\sin t\end{cases}$ $(a>0)$.

11. Dùng tích phân đường loại 2 tính diện tích của miền giới hạn bởi một nhịp xycloit: $x=a(t-\sin t)$; $y=a(1-\cos t)$ và trục Ox, $(a>0)$.

12. $\displaystyle\int\limits_{(-2;-1)}^{(3;0)} (x^4+4xy^3)dx+(6x^2y^2-5y^4)dy$.

13. $\displaystyle\int\limits_{(1;\pi)}^{(2;2\pi)} \left(1-\frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x}\right)dx+\left(\sin\frac{y}{x}+\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}\right)dy$.

14. Tìm hằng số α để tích phân sau không phụ thuộc vào đường đi trong miền xác định

$$\int\limits_{AB}\frac{(1-y^2)dx+(1-x^2)dy}{(1+xy)^\alpha}.$$

15. Tìm các hằng số a, b để biểu thức

$$(y^2+axy+y\sin(xy))dx+(x^2+bxy+x\sin(xy))dy$$

là vi phân toàn phần của một hàm số $u(x,y)$ nào đó. Hãy tìm hàm số $u(x,y)$ đó.

16. Tìm hàm số $h(x)$ để tích phân

$$\int\limits_{AB} h(x)[(1+xy)dx+(xy+x^2)dy]$$

không phụ thuộc vào đường đi trong miền xác định. Với $h(x)$ vừa tìm được, hãy tính tích phân trên từ $A(1;1)$ đến $B(2;3)$.

17. Tìm hàm số $h(y)$ để tích phân

$$\int\limits_{AB} h(y)[y(2x+y^3)dx-x(2x-y^3)dy]$$

không phụ thuộc vào đường đi trong miền xác định. Với $h(y)$ vừa tìm được, hãy tính tích phân trên từ $A(0;1)$ đến $B(-3;2)$.

18. Tìm hàm số $h(xy)$ để tích phân

$$\int_{AB} h(xy)[(y+x^3y^2)dx+(x+x^2y^3)dy]$$

không phụ thuộc vào đường đi trong miền xác định. Với $h(xy)$ vừa tìm được, hãy tính tích phân trên từ $A(1;1)$ đến $B(2;3)$.

CHƯƠNG 5

Tích phân mặt

Tính các tích phân mặt loại 1 sau đây

1. $\iint_S (z+2x+\frac{4y}{3})dS$, trong đó $S=\{(x,y,z): \frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1, x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0\}$.
2. $\iint_S (x^2+y^2)dS$, trong đó $S=\{(x,y,z): z=x^2+y^2, 0\le z\le 1\}$.

Tính các tích phân mặt loại 2 sau đây

3. $\iint_S z(x^2+y^2)dxdy$, trong đó S là nửa mặt cầu: $x^2+y^2+z^2=1$, $z\ge 0$, hướng của S là phía ngoài mặt cầu.
4. $\iint_S ydzdx+z^2dxdy$, trong đó S là phía ngoài của mặt elipxoit: $x^2+\frac{y^2}{4}+z^2=1$, $x\ge 0$, $y\ge 0$, $z\ge 0$.
5. $\iint_S x^2y^2zdxdy$, trong đó S là mặt trên của nửa mặt cầu: $x^2+y^2+z^2=R^2$, $z\le 0$.
6. $\iint_S xdydz+ydzdx+zdxdy$, trong đó S là phía ngoài của mặt cầu: $x^2+y^2+z^2=a^2$.
7. $\iint_S x^3dydz+y^3dzdx+z^3dxdy$, trong đó S là phía ngoài của mặt cầu: $x^2+y^2+z^2=R^2$.
8. $\iint_S y^2zdxdy+xzdydz+x^2ydzdx$, trong đó S là phía ngoài của miền: $x\ge 0$, $y\ge 0$, $x^2+y^2\le 1$, $0\le z\le x^2+y^2$.
9. $\iint_S xdydz+ydzdx+zdxdy$, trong đó S là phía ngoài của miền: $(z-1)^2\ge x^2+y^2$, $a\le z\le 1$.

10. Gọi S là phần mặt cầu $x^2+y^2+z^2=1$ nằm trong mặt trụ $x^2+x+z^2=0$, $y\geq 0$, hướng của S là phía ngoài của mặt cầu. Chứng minh rằng:

$$\iint\limits_S (x-y)dxdy+(y-z)dydz+(z-x)dzdx=0.$$

CHƯƠNG 6
Lý thuyết trường

1. Tính đạo hàm theo hướng $\vec{l}$ của hàm $u=x^3+2y^3-3z^3$ tại điểm $A(2;0;1)$ với $\vec{l}=\overrightarrow{AB}$, $B(1;2;-1)$.

2. Tính môđun của $\overrightarrow{grad\,u}$, với

$$u=x^3+y^3+z^3-3xyz$$

tại $A(2;1;1)$. Khi nào thì $\overrightarrow{grad\,u}$ vuông góc với Oz, khi nào thì $\overrightarrow{grad\,u}=0$?

3. Tính $\overrightarrow{grad\,u}$, với

$$u=r^2+\frac{1}{r}+\ln r,\; r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

4. Theo hướng nào thì sự biến thiên của hàm số $u=x\sin z-y\cos z$ từ gốc $O(0;0;0)$ là lớn nhất?

5. Tính góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{grad\,z}$ của các hàm số $z=\sqrt{x^2+y^2}$ và $z=x-3y+\sqrt{3xy}$ tại $(3;4)$.

6. Trong các trường sau đây, trường nào là trường thế:

a) $\vec{a}=5(x^2-4xy)\vec{i}+(3x^2-2y)\vec{j}+\vec{k}$.

b) $\vec{a}=yz\vec{i}+xz\vec{j}+xy\vec{k}$.

c) $\vec{a}=(x+y)\vec{i}+(x+z)\vec{j}+(z+y)\vec{k}$.

7. Cho $\vec{F}=xz^2\vec{i}+yx^2\vec{j}+zy^2\vec{k}$. Tính thông lượng của $\vec{F}$ qua mặt cầu S: $x^2+y^2+z^2=1$, hướng ra ngoài.

8. Cho $\vec{F}=x(y+z)\vec{i}+y(z+x)\vec{j}+z(x+y)\vec{k}$, L là giao tuyến của mặt trụ $x^2+y^2+y=0$ và nửa mặt cầu $x^2+y^2+z^2=2$, $z\geq 0$. Chứng minh rằng lưu số của $\vec{F}$ dọc theo L bằng 0.