

Chương 5

KIỂM ĐỊNH GIẢ THUYẾT THỐNG KÊ

BỘ MÔN TOÁN ỨNG DỤNG⁽¹⁾

VIỆN TOÁN ỨNG DỤNG VÀ TIN HỌC
ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI

SAMI.HUST – 2023

⁽¹⁾Phòng BIS.201-D3.5

Chương này nghiên cứu bài toán kiểm định giả thuyết thống kê. Nội dung chủ yếu là kiểm định giả thuyết về tham số của tổng thể.

- Kiểm định giả thuyết về kỳ vọng, phương sai của biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn.
- Kiểm định giả thuyết về tỷ lệ của tổng thể trường hợp mẫu kích thước lớn.
- So sánh hai kỳ vọng, hai phương sai của các biến ngẫu nhiên phân phối chuẩn.
- So sánh tỷ lệ của hai mẫu kích thước lớn.

5.1. GIẢ THUYẾT THỐNG KÊ VÀ QUY TẮC KIỂM ĐỊNH

1 5.1.1 Giả thuyết thống kê

- 5.1.1.1 Giả thuyết thống kê
- 5.1.1.2 Giả thuyết không, đối thuyết
- 5.1.1.3 Bài toán kiểm định giả thuyết thống kê

2 5.1.2 Tiêu chuẩn kiểm định. Mức ý nghĩa. Miền bác bỏ

- 5.1.2.1 Cơ sở lập luận
- 5.1.2.2 Các bước tiến hành
- 5.1.2.3 Tiêu chuẩn kiểm định. Mức ý nghĩa. Miền bác bỏ

3 5.1.3 Sai lầm loại I. Sai lầm loại II

- 5.1.3.1 Sai lầm loại I
- 5.1.3.2 Sai lầm loại II
- 5.1.3.3 Hiệu lực của kiểm định
- 5.1.3.3 Lựa chọn miền bác bỏ giả thuyết H_0 để β bé nhất

4 5.1.4 Các bước giải bài toán kiểm định giả thuyết thống kê

5 Bài tập Mục 5.1

Thông thường ta nghiên cứu biến ngẫu nhiên trong trường hợp thông tin không đầy đủ, thể hiện ở nhiều mặt. Chẳng hạn,

- Chưa biết chính xác tham số θ , hoặc phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên X , nhưng có cơ sở nào đó để nêu lên giả thuyết, chẳng hạn $\theta = \theta_0$ (θ_0 đã biết), hoặc X có phân phối chuẩn.
- Khi nghiên cứu hai hay nhiều biến ngẫu nhiên, một trong những vấn đề cần quan tâm nhất là
 - Các biến ngẫu nhiên này độc lập với nhau hay có sự phụ thuộc tương quan?
 - Các tham số của chúng có bằng nhau hay không?

Những câu hỏi này thường chưa được trả lời khẳng định mà mới chỉ nêu lên như một giả thuyết.


Định nghĩa 1

Bất kỳ giả thuyết nào nói về tham số, dạng phân phối xác suất hay tính độc lập của các biến ngẫu nhiên, đều được gọi là giả thuyết thống kê.

✎ Trong khuôn khổ của chương trình, ta chỉ đề cập đến giả thuyết về tham số của biến ngẫu nhiên.



- Giả sử cần nghiên cứu tham số θ của biến ngẫu nhiên X và có cơ sở nào đó để nêu lên giả thuyết $\theta = \theta_0$. Giả thuyết này ký hiệu là H_0 , còn gọi là giả thuyết không.
- Mệnh đề đối lập hay trái ngược với giả thuyết H_0 ký hiệu là H_1 , được gọi là đôi thuyết. Dạng tổng quát nhất của H_1 là $\theta \neq \theta_0$. Trong nhiều trường hợp đôi thuyết được phát biểu cụ thể là $H_1 : \theta > \theta_0$ hoặc $H_1 : \theta < \theta_0$.

 Giả thuyết không và đôi thuyết thường được phát biểu thành cặp

- Kiểm định hai phía: $H_0 : \theta = \theta_0, H_1 : \theta \neq \theta_0$.
- Kiểm định một phía phải: $H_0 : \theta = \theta_0, H_1 : \theta > \theta_0$.
- Kiểm định một phía trái: $H_0 : \theta = \theta_0, H_1 : \theta < \theta_0$.

- Bài toán kiểm định giả thuyết thống kê là bài toán mà ở đó ta có cặp giả thuyết thống kê $\{H_0; H_1\}$, ta cần khẳng định dữ liệu mà ta quan sát được ủng hộ giả thuyết nào.
- Nếu dữ liệu ủng hộ giả thuyết H_0 thì kết luận là “Chấp nhận H_0 ” hay “Chưa có cơ sở để bác bỏ giả thuyết H_0 ”.
- Nếu dữ liệu ủng hộ đối thuyết H_1 thì kết luận là “Bác bỏ giả thuyết H_0 ”.

Định nghĩa 2

Một quy tắc hay một thủ tục quyết định dẫn tới việc bác bỏ hay chấp nhận giả thuyết đã nêu gọi là một kiểm định thống kê.

Ví dụ 1

Giả sử số tiền chi trả (triệu đồng) cho khách hàng của một hãng bảo hiểm là một biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn với số tiền chi trả trung bình là 50 triệu đồng và độ lệch tiêu chuẩn là 2,5 triệu đồng. Ta muốn biết liệu số tiền chi trả trung bình có phải là 50 triệu đồng hay không, thì giả thuyết không và đối thuyết là

$$H_0 : \mu = 50 \quad \text{và} \quad H_1 : \mu \neq 50,$$

ở đây, μ là số tiền chi trả trung bình cho khách hàng. Nếu bác bỏ giả thuyết H_0 thì ta kết luận “số tiền chi trả trung bình cho khách hàng khác 50 triệu đồng.”

Ví dụ 2

Một quá trình sản xuất tạo ra 3% sản phẩm lỗi. Ta muốn quan tâm liệu một điều chỉnh trên máy có làm giảm tỷ lệ sản phẩm lỗi của quá trình sản xuất hay không, thì giả thuyết không và đối thuyết là

$$H_0 : p = 0,03 \quad \text{và} \quad H_1 : p < 0,03,$$

ở đây, p là tỷ lệ sản phẩm lỗi của quá trình sản xuất. Nếu bác bỏ giả thuyết H_0 thì ta kết luận “việc điều chỉnh trên máy tạo ra ít hơn 3% sản phẩm lỗi.”

Ví dụ 3

Để đánh giá tuổi thọ của một loại pin, người ta lấy ra một mẫu kích thước $n = 50$ quả pin để kiểm tra tuổi thọ, thấy tuổi thọ trung bình của những quả pin này là 4,05 giờ. Giả sử tuổi thọ của pin là biến ngẫu nhiên xấp xỉ phân phối chuẩn với độ lệch chuẩn $\sigma = 0,2$ giờ. Ta muốn biết liệu có đủ bằng chứng để chứng tỏ tuổi thọ trung bình của pin là nhiều hơn 4 giờ hay không, thì giả thuyết không và đối thuyết là

$$H_0 : \mu = 4 \quad \text{và} \quad H_1 : \mu > 4,$$

ở đây, μ là tuổi thọ trung bình của pin. Nếu bác bỏ giả thuyết H_0 thì ta kết luận “tuổi thọ của pin là nhiều hơn 4 giờ.”

5.1. GIẢ THUYẾT THỐNG KÊ VÀ QUY TẮC KIỂM ĐỊNH

- 1 **5.1.1 Giả thuyết thống kê**
 - 5.1.1.1 Giả thuyết thống kê
 - 5.1.1.2 Giả thuyết không, đối thuyết
 - 5.1.1.3 Bài toán kiểm định giả thuyết thống kê
- 2 **5.1.2 Tiêu chuẩn kiểm định. Mức ý nghĩa. Miền bác bỏ**
 - 5.1.2.1 Cơ sở lập luận
 - 5.1.2.2 Các bước tiến hành
 - 5.1.2.3 Tiêu chuẩn kiểm định. Mức ý nghĩa. Miền bác bỏ
- 3 **5.1.3 Sai lầm loại I. Sai lầm loại II**
 - 5.1.3.1 Sai lầm loại I
 - 5.1.3.2 Sai lầm loại II
 - 5.1.3.3 Hiệu lực của kiểm định
 - 5.1.3.3 Lựa chọn miền bác bỏ giả thuyết H_0 để β bé nhất
- 4 **5.1.4 Các bước giải bài toán kiểm định giả thuyết thống kê**
- 5 **Bài tập Mục 5.1**

Câu hỏi đặt ra là “Bác bỏ hay chấp nhận giả thuyết H_0 bằng cách nào?” Ta sử dụng nguyên lý và phương pháp phản chứng sau.

- Nguyên lý xác suất nhỏ: “Nếu một sự kiện có xác suất rất nhỏ, thì trong một lần thực hiện phép thử, sự kiện đó coi như không xảy ra”.
- Phương pháp phản chứng: “Để bác bỏ A ta giả sử A đúng, nếu A đúng dẫn đến một điều vô lý thì bác bỏ A ”.

Cơ sở lập luận

Giả sử giả thuyết H_0 là đúng. Trên cơ sở đó ta xây dựng một sự kiện A , sao cho, xác suất xuất hiện A bằng α bé đến mức có thể sử dụng nguyên lý xác suất nhỏ, tức là, có thể coi A không xảy ra trong phép thử về sự kiện này. Thực hiện một phép thử đối với sự kiện A :

- Nếu A xảy ra thì bác bỏ giả thuyết H_0 .
- Nếu A không xảy ra thì chưa có cơ sở để bác bỏ giả thuyết H_0 .

Giả sử cần kiểm định cặp giả thuyết $\{H_0; H_1\}$ phát biểu về tham số θ tương ứng với một biến ngẫu nhiên X .

1. Từ biến ngẫu nhiên X , lập mẫu ngẫu nhiên $W_X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ kích thước n và chọn thống kê U phụ thuộc vào tham số θ ,

$$U(X, \theta) = g(X_1, X_2, \dots, X_n; \theta) \quad (1)$$

sao cho, nếu giả thuyết H_0 là đúng thì phân phối xác suất của U hoàn toàn xác định.

2. Với một giá trị thực α bé gần 0 cho trước, dựa vào phân phối xác suất của thống kê U , ta tìm miền W_α sao cho

$$P(U \in W_\alpha | H_0) = \alpha. \quad (2)$$

Vì α rất nhỏ, nên theo nguyên lý xác suất nhỏ, có thể coi U không nhận giá trị trong miền W_α đối với một lần thực hiện phép thử.

3. Thực hiện một phép thử đối với mẫu ngẫu nhiên $W_X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ ta thu được mẫu cụ thể $W_x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ và tính được giá trị cụ thể của U trong (1), gọi là giá trị quan sát của U , ký hiệu là u hay u_{qs} .
4. Xét xem giá trị quan sát u có thuộc miền W_α hay không để kết luận.
 - Nếu $u \in W_\alpha$ thì bác bỏ giả thuyết H_0 thừa nhận H_1 .
 - Nếu $u \notin W_\alpha$ thì chưa có cơ sở để bác bỏ giả thuyết H_0 .

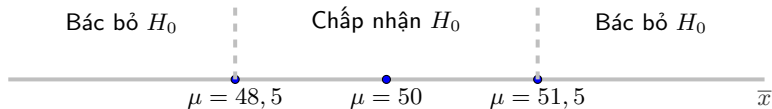
Tiêu chuẩn kiểm định. Mức ý nghĩa. Miền bác bỏ



- Thống kê U xác định trong (1) được gọi là tiêu chuẩn kiểm định.
 - Xác suất α được gọi là mức ý nghĩa của kiểm định (thông thường yêu cầu $\alpha \leq 0,05$).
 - Miền W_α được gọi là miền bác bỏ giả thuyết H_0 với mức ý nghĩa α .
- ✎ Cùng mức ý nghĩa α đối với một tiêu chuẩn kiểm định U có thể có vô số miền bác bỏ giả thuyết H_0 .

Ví dụ 4

Với Ví dụ 1, giả sử ta quan sát số tiền chi trả cho $n = 10$ khách hàng. Giá trị trung bình \bar{x} của mẫu là một ước lượng điểm của trung bình tổng thể μ . Một giá trị trung bình mẫu \bar{x} rất gần với giá trị của $\mu = 50$ triệu đồng sẽ không mâu thuẫn với giả thuyết H_0 rằng giá trị trung bình thực sự là 50 triệu đồng. Nếu một giá trị trung bình mẫu \bar{x} có khác biệt đáng kể so với 50 triệu đồng là minh chứng ủng hộ đối thuyết H_1 . Giả sử, $48,5 \leq \bar{x} \leq 51,5$ thì chấp nhận giả thuyết H_0 và $\bar{x} < 48,5$ hoặc $\bar{x} > 51,5$ thì bác bỏ giả thuyết H_0 , điều này được minh họa trong Hình 1.



Hình 1: Miền bác bỏ giả thuyết H_0

5.1. GIẢ THUYẾT THỐNG KÊ VÀ QUY TẮC KIỂM ĐỊNH

- 1 **5.1.1 Giả thuyết thống kê**
 - 5.1.1.1 Giả thuyết thống kê
 - 5.1.1.2 Giả thuyết không, đối thuyết
 - 5.1.1.3 Bài toán kiểm định giả thuyết thống kê
- 2 **5.1.2 Tiêu chuẩn kiểm định. Mức ý nghĩa. Miền bác bỏ**
 - 5.1.2.1 Cơ sở lập luận
 - 5.1.2.2 Các bước tiến hành
 - 5.1.2.3 Tiêu chuẩn kiểm định. Mức ý nghĩa. Miền bác bỏ
- 3 **5.1.3 Sai lầm loại I. Sai lầm loại II**
 - 5.1.3.1 Sai lầm loại I
 - 5.1.3.2 Sai lầm loại II
 - 5.1.3.3 Hiệu lực của kiểm định
 - 5.1.3.3 Lựa chọn miền bác bỏ giả thuyết H_0 để β bé nhất
- 4 **5.1.4 Các bước giải bài toán kiểm định giả thuyết thống kê**
- 5 **Bài tập Mục 5.1**

Định nghĩa 3

Sai lầm loại I là sai lầm mà ta bác bỏ giả thuyết H_0 trong khi H_0 đúng. Xác suất mắc sai lầm loại I chính bằng α ,

$$P(U \in W_\alpha | H_0) = \alpha. \quad (3)$$

Định nghĩa 4

Sai lầm loại II là sai lầm mà ta thừa nhận H_0 trong khi H_0 sai, hay giá trị quan sát u không thuộc miền bác bỏ W_α trong khi H_1 đúng. Xác suất mắc sai lầm loại II là

$$\beta = P(U \notin W_\alpha | H_1) = 1 - P(U \in W_\alpha | H_1). \quad (4)$$

🔗 Để tính toán xác suất mắc sai lầm loại II ta phải có đối thuyết cụ thể.

✎ Từ (4), suy ra, xác suất bác bỏ giả thuyết H_0 nếu nó sai là

$$P(U \in W_\alpha | H_1) = 1 - \beta.$$

Xác suất này gọi là hiệu lực của kiểm định, nó chính là xác suất “không mắc sai lầm loại II”.

Ta thường so sánh các bài kiểm định giả thuyết thống kê bằng cách so sánh các hiệu lực của chúng.

Các tình huống có thể xảy ra

✎ Các tình huống có thể xảy ra khi kiểm định cặp giả thuyết thống kê $\{H_0; H_1\}$

Quyết định \ Thực tế	H_0 đúng	H_0 sai
	Sai lầm loại I Xác suất bằng α	Quyết định đúng Xác suất bằng $1 - \beta$
Bác bỏ H_0		
Không bác bỏ H_0	Quyết định đúng Xác suất bằng $1 - \alpha$	Sai lầm loại II Xác suất bằng β

Lựa chọn miền bác bỏ giả thuyết H_0 để β bé nhất



- Khi kiểm định giả thuyết thống kê dẫn tới việc chấp nhận H_0 thì xác suất mắc sai lầm loại II ta không biết và có thể khá lớn. Do đó, việc chấp nhận H_0 là một quyết định dè dặt. Nói khác đi, khi chấp nhận H_0 ta không nên hiểu H_0 đúng mà chỉ nên hiểu rằng với các chứng cứ và số liệu đã có chưa đủ để bác bỏ H_0 , cần phải nghiên cứu tiếp.
- Nếu kết luận bác bỏ H_0 thì hoặc kết luận đó là đúng hoặc ta mắc sai lầm loại I với xác suất nhỏ. Do đó kết luận này là kết luận đáng tin cậy.
- Một kiểm định thống kê lý tưởng là kiểm định làm cực tiểu cả hai sai lầm. Tuy nhiên, điều đó là không thực hiện được.
- Người ta tìm cách cố định sai lầm loại I và cực tiểu sai lầm loại II.

Lựa chọn miền bác bỏ giả thuyết H_0 để β bé nhất



- Khi kiểm định giả thuyết thống kê, nếu mức ý nghĩa α đã chọn, kích thước mẫu n đã xác định, vấn đề còn lại là trong vô số miền bác bỏ, ta chọn miền W_α sao cho xác suất mắc sai lầm loại II là nhỏ nhất hay hiệu lực của kiểm định lớn nhất:

$$P(U \in W_\alpha | H_0) = \alpha \quad \text{và} \quad P(U \in W_\alpha | H_1) = 1 - \beta \rightarrow \max. \quad (5)$$

- Trong thực hành, quy tắc được xây dựng ở các mục tiếp theo có miền bác bỏ thỏa mãn tính chất trên.

5.1. GIẢ THUYẾT THỐNG KÊ VÀ QUY TẮC KIỂM ĐỊNH

- 1 5.1.1 Giả thuyết thống kê
 - 5.1.1.1 Giả thuyết thống kê
 - 5.1.1.2 Giả thuyết không, đối thuyết
 - 5.1.1.3 Bài toán kiểm định giả thuyết thống kê
- 2 5.1.2 Tiêu chuẩn kiểm định. Mức ý nghĩa. Miền bác bỏ
 - 5.1.2.1 Cơ sở lập luận
 - 5.1.2.2 Các bước tiến hành
 - 5.1.2.3 Tiêu chuẩn kiểm định. Mức ý nghĩa. Miền bác bỏ
- 3 5.1.3 Sai lầm loại I. Sai lầm loại II
 - 5.1.3.1 Sai lầm loại I
 - 5.1.3.2 Sai lầm loại II
 - 5.1.3.3 Hiệu lực của kiểm định
 - 5.1.3.3 Lựa chọn miền bác bỏ giả thuyết H_0 để β bé nhất
- 4 5.1.4 Các bước giải bài toán kiểm định giả thuyết thống kê
- 5 Bài tập Mục 5.1

Các bước giải bài toán kiểm định giả thuyết thống kê



- 1 Xác định cặp giả thuyết cần kiểm định $\{H_0; H_1\}$.
- 2 Chọn tiêu chuẩn kiểm định và xác định phân phối xác suất của thống kê này nếu giả thuyết H_0 là đúng.
- 3 Với mức ý nghĩa α cho trước và dựa vào phân phối xác suất của thống kê đã xét ở trên, xây dựng miền bác bỏ giả thuyết H_0 .
- 4 Tính giá trị quan sát của tiêu chuẩn kiểm định từ mẫu quan sát được.
- 5 Kết luận bác bỏ H_0 hay chưa có cơ sở để bác bỏ H_0 và báo cáo điều đó trong bối cảnh của bài toán.

5.1. GIẢ THUYẾT THỐNG KÊ VÀ QUY TẮC KIỂM ĐỊNH

- 1 5.1.1 Giả thuyết thống kê
 - 5.1.1.1 Giả thuyết thống kê
 - 5.1.1.2 Giả thuyết không, đối thuyết
 - 5.1.1.3 Bài toán kiểm định giả thuyết thống kê
- 2 5.1.2 Tiêu chuẩn kiểm định. Mức ý nghĩa. Miền bác bỏ
 - 5.1.2.1 Cơ sở lập luận
 - 5.1.2.2 Các bước tiến hành
 - 5.1.2.3 Tiêu chuẩn kiểm định. Mức ý nghĩa. Miền bác bỏ
- 3 5.1.3 Sai lầm loại I. Sai lầm loại II
 - 5.1.3.1 Sai lầm loại I
 - 5.1.3.2 Sai lầm loại II
 - 5.1.3.3 Hiệu lực của kiểm định
 - 5.1.3.3 Lựa chọn miền bác bỏ giả thuyết H_0 để β bé nhất
- 4 5.1.4 Các bước giải bài toán kiểm định giả thuyết thống kê
- 5 Bài tập Mục 5.1

Bài 1

Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

- A. Sai lầm loại I là bác bỏ giả thuyết H_0 nhưng trên thực tế H_0 đúng.
- B. Sai lầm loại I là chấp nhận giả thuyết H_0 nhưng trên thực tế H_0 sai.
- C. Sai lầm loại II là bác bỏ giả thuyết H_0 nhưng trên thực tế H_0 đúng.
- D. Sai lầm loại II là chấp nhận giả thuyết H_0 nhưng trên thực tế H_0 sai.

Bài 2

Cho X là biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn với giá trị trung bình μ chưa biết và độ lệch tiêu chuẩn σ đã biết. Xét bài toán kiểm định giả thuyết: $H_0 : \mu = 3$; $H_1 : \mu = 5$. Với mức ý nghĩa $\alpha = 0,01$, anh/chị hãy cho biết kết luận nào sau đây là đúng:

- A. Khi xác suất sai lầm loại I giảm thì xác suất sai lầm loại II tăng.
- B. Khi xác suất sai lầm loại I tăng thì xác suất sai lầm loại II tăng.
- C. Khi xác suất sai lầm loại I giảm thì xác suất sai lầm loại II không đổi.
- D. Khi xác suất sai lầm loại I giảm thì xác suất sai lầm loại II giảm.