

Chương 2

BIẾN NGẪU NHIÊN VÀ LUẬT PHÂN PHỐI XÁC SUẤT

BỘ MÔN TOÁN ỨNG DỤNG⁽¹⁾

VIỆN TOÁN ỨNG DỤNG VÀ TIN HỌC
HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI

SAMI.HUST – 2023

⁽¹⁾Phòng 201.BIS-D3.5

Chương này nghiên cứu về biến ngẫu nhiên. Nội dung bao gồm:

- Khái niệm và phân loại biến ngẫu nhiên.
- Phân tích phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên thông qua hàm xác suất hoặc bảng phân phối, hàm phân phối, hàm mật độ xác suất.
- Trình bày một số giá trị đặc trưng của biến ngẫu nhiên như kỳ vọng, phương sai, độ lệch chuẩn, môđ, trung vị.
- Giới thiệu một số phân phối rời rạc thông dụng: phân phối đều, phân phối Bernoulli, phân phối nhị thức, phân phối Poisson; và một số phân phối liên tục thông dụng: phân phối đều, phân phối mũ, phân phối chuẩn, phân phối Student, phân phối khi-bình phương, phân phối Fisher.

2.1. BIẾN NGẪU NHIÊN

1 2.1.1 Khái niệm và phân loại biến ngẫu nhiên

2 2.1.2 Hàm của một biến ngẫu nhiên

3 Bài tập Mục 2.1

Khái niệm 1

Giả sử ta có một phép thử với không gian mẫu là S . Một biến ngẫu nhiên là một hàm số của các kết cục $X : S \rightarrow \mathbb{R}$ cho tương ứng $\omega \in S$ với $X(\omega) \in \mathbb{R}$.

✎ Ký hiệu S_X là tập các giá trị của X .

- Nếu S_X là tập hữu hạn hoặc vô hạn đếm được thì X là **biến ngẫu nhiên rời rạc**.
- Nếu S_X là tập vô hạn không đếm được thì X là **biến ngẫu nhiên liên tục**.

✎ Trong khuôn khổ của chương trình ta chỉ nghiên cứu hai loại biến ngẫu nhiên hoặc là biến ngẫu nhiên rời rạc hoặc là biến ngẫu nhiên liên tục và không nghiên cứu biến ngẫu nhiên vừa rời rạc vừa liên tục (còn gọi là biến ngẫu nhiên hỗn hợp).



- X được gọi là biến ngẫu nhiên vì trước khi tiến hành phép thử ngẫu nhiên ta chưa có thể nói một cách chắc chắn nó sẽ nhận một giá trị bằng bao nhiêu. Nói cách khác, việc biến ngẫu nhiên X nhận một giá trị nào đó $(X = x_1), (X = x_2), \dots, (X = x_n)$ về thực chất là các sự kiện.
- Nếu biến ngẫu nhiên X chỉ nhận các giá trị x_1, x_2, \dots, x_n trong một phép thử thì $(X = x_1), (X = x_2), \dots, (X = x_n)$ tạo nên một hệ đầy đủ các sự kiện.
- Khái niệm biến ngẫu nhiên xác định như trên được gọi là biến ngẫu nhiên một chiều và $S_X \subset \mathbb{R}$.

Ví dụ 1

Tung một đồng xu cân đối đồng chất hai lần. Không gian mẫu là $S = \{SS, SN, NS, NN\}$. Gọi X là số lần xuất hiện mặt ngửa trong tổng số hai lần tung. Khi đó, X là một hàm từ S vào $S_X = \{0, 1, 2\}$ cho ương ứng

- SS với 0;
- SN với 1;
- NS với 1;
- NN với 2.

X là biến ngẫu nhiên rời rạc, S_X là tập hữu hạn.

Ví dụ 2

Tung một đồng xu cân đối đồng chất cho đến khi xuất hiện mặt ngửa thì dừng lại. Không gian mẫu là $S = \{N, SN, SSN, SSSN, \dots\}$. Gọi Y là số lần tung. Khi đó, $S_Y = \{1, 2, 3, \dots\}$ và Y là một hàm từ S vào S_Y cho tương ứng

- N với 1;
- SN với 2;
- SSN với 3;
- $SSSN$ với 4;
-

Y là biến ngẫu nhiên rời rạc, S_Y là tập vô hạn đếm được phần tử.

Ví dụ 3

Một xạ thủ bắn một viên đạn vào bia có tâm là $O(0; 0)$, bán kính 20 centimét và giả sử viên đạn trúng bia. Không gian mẫu là $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 20^2\}$. Gọi Z là khoảng cách từ tâm bia tới điểm bia trúng đạn, thì $S_Z = [0; 20 \text{ (cm)}]$ và Z là hàm số từ S vào S_Z cho tương ứng $(x, y) \in S$ với $\sqrt{x^2 + y^2} \in S_Z$.

- Z là biến ngẫu nhiên liên tục;
- S_Z là tập hợp vô hạn không đếm được.

2.1. BIẾN NGẪU NHIÊN



1 2.1.1 Khái niệm và phân loại biến ngẫu nhiên

2 2.1.2 Hàm của một biến ngẫu nhiên

3 Bài tập Mục 2.1

Khái niệm 2

Cho X là một biến ngẫu nhiên và $g(x)$ là một hàm số thực. Đặt $Y = g(X) := g(x)|_{x=X}$. Biến ngẫu nhiên $g(X)$ như vậy được gọi là hàm của biến ngẫu nhiên X .



- Nếu X là biến ngẫu nhiên rời rạc thì $g(X)$ cũng là biến ngẫu nhiên rời rạc.
- Nếu X là biến ngẫu nhiên liên tục và $g(\cdot)$ là một hàm liên tục thì $g(X)$ là biến ngẫu nhiên liên tục.

Ví dụ 4

Một công ty điện thoại tính cước phí cho một bản fax như sau: 10 nghìn đồng cho trang thứ nhất, 9 nghìn đồng cho trang thứ hai, ..., 6 nghìn đồng cho trang thứ năm. Những bản fax từ 6 đến 10 trang có phí là 50 nghìn đồng. Công ty điện thoại này không nhận những bản fax dài quá 10 trang. Gọi X là số trang trong một bản fax và Y là chi phí phải trả cho một bản fax. Khi đó, X là biến ngẫu nhiên rời rạc và $S_X = \{1, 2, \dots, 10\}$ và Y là một hàm của X được xác định bởi

$$Y := g(X) = \begin{cases} 10,5X - 0,5X^2, & 1 \leq X \leq 5, \\ 50, & 6 \leq X \leq 10. \end{cases}$$

2.1. BIẾN NGẪU NHIÊN

1 2.1.1 Khái niệm và phân loại biến ngẫu nhiên

2 2.1.2 Hàm của một biến ngẫu nhiên

3 Bài tập Mục 2.1

Bài 1

Ký hiệu X là số khách hàng đến một siêu thị trong một ngày. Khẳng định nào sau đây là ĐÚNG?

- A. X là một hằng số.
- B. X là một biến ngẫu nhiên rời rạc nhận hữu hạn giá trị.
- C. X là một biến ngẫu nhiên rời rạc có thể nhận vô hạn giá trị.
- D. X là một biến ngẫu nhiên liên tục.

Bài 2

Ký hiệu Y (gam) là trọng lượng của một loại sản phẩm đúc có trọng lượng tối đa là 500 gam. Khi đó, miền giá trị của Y là:

- A. $S_Y = \{1; 2; \dots; 10\}$.
- B. $S_Y = (0; 500]$.
- C. $S_Y = (-\infty; +\infty)$.
- D. $S_Y = \{0; 1; \dots; 500\}$.

Bài 3

Ký hiệu Z là tổng số chấm xuất hiện khi gieo đồng thời ba con xúc xắc.

- (a) Tìm miền giá trị của Z .
- (b) Tính xác suất của các sự kiện: $(Z = 25)$, $(Z = 3)$, $(Z = 5)$.

Bài 4

Biết rằng giá vé thuê xe máy tại một cửa hàng cho thuê xe máy là 50000 VNĐ cho năm giờ đầu tiên và 20000 VNĐ cho mỗi giờ tiếp theo. Thời gian thuê được tính làm tròn tăng lên, tức là khách hàng chỉ cần quá một giây cũng được tính thêm một giờ. Ký hiệu X (giờ) là thời gian thực tế một khách hàng thuê xe và Y là số tiền khách hàng phải trả.

- (a) Tìm mối liên hệ giữa X và Y .
- (b) Tìm miền giá trị của X và Y .

Bài 5

Kiểm tra một lô hàng gồm 6 mạch điện tử được giao cho khách hàng. Sau mỗi kiểm tra, mạch có thể được chấp nhận hoặc bị từ chối nếu không đảm bảo được tiêu chuẩn cho phép. Ký hiệu R là doanh thu thuần (khoản tiền thu được từ việc bán hàng hóa dịch vụ sau khi đã khấu trừ các loại thuế, các loại giảm giá...) của lô hàng, biết rằng mỗi mạch được chấp nhận có doanh thu thuần là 5 đô la và -7 đô la cho mỗi mạch bị từ chối (điều này là do đối với mỗi mạch bị hỏng xuất xưởng, công ty sẽ phải trả 7 đô la để giải quyết khiếu nại của khách hàng và cung cấp mạch thay thế tốt). Gọi N là số mạch điện trong lô hàng được chấp nhận.

- (a) Tìm miền giá trị của N .
- (b) Viết hàm biểu diễn mối quan hệ giữa R và N .